

- Cours en ligne
- Cours presentiels

 **MATHS**

 **PC**

 **SVT**

La science autrement...



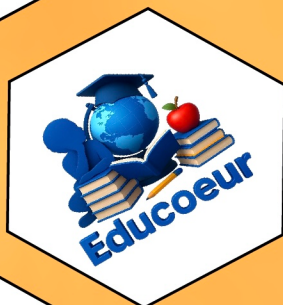
Nos programmes:

Niveaux : Moyen/Secondaire



Programme Wolof

Apprentissage avec des cours
exclusivement en Wolof



Programme Social

Prise en charge d'élèves avec
des problèmes de moyens



Tous les élèves

Renforcement de capacité
en ligne



Prépa Concours

Préparation des concours comme :
ESP - EMS - ENSA - IPSL
ISFAR ENSAE



77 106 98 79
77 575 04 18



FICHE PREPA COMPO 1^{ER} SEMESTRE N°1

THEME : FONCTIONS NUMERIQUES

PROBLEME N°1 :

Soit la fonction f définie sur $D = \mathbb{R} \setminus \{-1 ; 1\}$ par $f(x) = \frac{2x^3 + 3}{x^2 - 1}$. On nomme $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal (unité graphique : 1 cm). Le but de l'exercice est d'étudier cette fonction.

Partie A : Étude de la fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 - 3x - 3$

1. Étudier les variations de g et dresser son tableau de variation 1 pt
2. En déduire que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution que l'on note α .
et telle que $2,10 < \alpha < 2,11$ 0,75 pt
4. Déterminer le signe de g sur $\mathbb{R}$ 0,5 pt

Partie B : Étude de la fonction f

1. Étudiez les limites de f aux bornes de son ensemble de définition. 1 pt
2. Montrer que $f'(x) = g(x) \times h(x)$ où h est une fonction à préciser
En déduire, à l'aide de la partie A, le tableau de variation de la fonction f . 1,5 pt
3. a) Vérifiez que pour tout $x \in D$, $f'(x) = 2x + \frac{2x+3}{x^2-1}$. 0,25 pt
b) En déduire que la droite d'équation $y = 2x$ est une asymptote à la courbe $\mathcal{C}$ représentant f . 0,5 pt
c) Étudiez la position de la courbe $\mathcal{C}$ par rapport à cette asymptote.
Précisez en particulier les coordonnées du point d'intersection de d et $\mathcal{C}$. 1 pt
4. $\mathcal{C}$ admet-elle d'autres asymptotes ? Si oui les préciser. 0,5 pt
5. Tracez la courbe et ses asymptotes. 1 pt

PROBLEME N° 2 :

Partie A :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = x^2 + 1 + \frac{2}{x}$.

1. Dresser le tableau de variation de f . On précisera les limites aux bornes du domaine de définition. 2pts
2. Montrer que $f(x) \geq 0$ sur $] -\infty; -1] \cup]0; +\infty[$. 1pt

Partie B :

Soit la fonction g définie sur $D_g =] -\infty; -1] \cup]0; +\infty[$ par $g(x) = \sqrt{f(x)}$.

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de g dans un repère orthonormé.

1. a. Montrer que g est dérivable sur $] -\infty; -1[\cup]0; +\infty[$. 1pt
b. Étudier alors les variations de la fonction g sur $] -\infty; -1[\cup]0; +\infty[$. 2pts
2. a. Montrer que, pour tout $x < -1$: $\frac{g(x) - g(-1)}{x + 1} = -\sqrt{\frac{x^2 - x + 2}{x(x + 1)}}$. 0.5pt
b. En déduire que la fonction g n'est pas dérivable en -1 . 0.5pt
c. Donner une équation de la tangente (T) à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse -1 . 0.5pt
3. a. Montrer que, pour tout réel x de D_g : $g(x) - x = \frac{1 + \frac{2}{x}}{\sqrt{x^2 + 1 + \frac{2}{x} + x}}$. 0.5pt
b. En déduire que la droite (Δ) d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}$ en $+\infty$. 0.5pt
c. Montrer de même que la droite (Δ') d'équation $y = -x$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}$ en $-\infty$. 1pt
4. Construire dans un repère orthonormé la courbe $\mathcal{C}$, les asymptotes (Δ) , (Δ') et la tangente (T) à $\mathcal{C}$ en -1 . 1.5 pt

PROBLEME N° 3 :

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ par : $f(x) = \frac{2x^3+3}{x^2-1}$ et (C_f) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (unité graphique : 1cm)

PARTIE A : Etude de la fonction auxiliaire 2.5pts

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x^3 - 3x - 3$

1. dresser son tableau de variation de la fonction g 1pt
2. montrer qu'il existe un unique réel α tel que $g(\alpha) = 0$, puis déterminer une valeur approchée à 10^{-1} près par défaut du réel α 1pt
3. étudier le signe de g sur $\mathbb{R}$ 0.5pt

PARTIE B : Etude de la fonction f 7pts

1. déterminer les limites de la fonction f aux bornes de chacun des intervalles de son ensemble de définition 1.5pt
2. montrer que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$: $f'(x) = \frac{2x \cdot g(x)}{(x^2-1)^2}$ 0.5pt
en déduire, à l'aide de la partie A, les variations de la fonction f puis son tableau de variation 1.5pt
3. a) montrer que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$: $f(x) = 2x + \frac{2x+3}{x^2-1}$ 0.25pt
b) en déduire que la courbe (C_f) admet une asymptote oblique $(D): y = 2x$ en $+\infty$ et en $-\infty$ 0.5pt
c) étudier la position de la courbe (C_f) par rapport à (D) 0.75pt
4. (C_f) admet-elle d'autres asymptotes ? si oui les préciser 0.5pt
5. tracer la courbe (C_f) et la droite (D) 1.5pt

PROBLEME N°4 :

Partie A

Soit la fonction f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} f(x) = \frac{x+1}{x^3+1} & \text{si } x \neq -1 \\ f(-1) = \frac{1}{3} \end{cases}$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f . 0.5pt.
2. Etudier la continuité de f en -1 1pt

Partie B

- I. On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 2x^3 + 3x^2 - 1$.
 1. Etudier les variations de h et dresser son tableau de variation. 1.5pt
 2. Calculer $h(\frac{1}{2})$ puis déterminer le signe de $h(x)$ suivant les valeurs de x . 1pt

- II. Soit la fonction g définie de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par $g(x) = \frac{x+1}{x^3+1}$, et (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) (prendre $OI = OJ = 2\text{cm}$).
1. a) Déterminer l'ensemble de définition D de g . 0.25pt
 b) Calculer les limites de g en $+\infty$; en $-\infty$ et en -1 . 1pt
 c) Déterminer une équation de la droite (d) asymptote à (C) . 0.25pt
 2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $g'(x) = \frac{-h(x)}{(x^3+1)^2}$. 0.75pt
 3. Dédire de 1. le sens de variation de g et dresser son tableau de variation. 1.5pt
 4. a) Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) en O . 0.5pt
 b) Etudier les positions relatives de (T) par rapport à (C) . 0.5pt
 5. a) Construire (C) et (T) dans le même repère. 1.5pt
 b) Représenter en pointillés sur le même repère la courbe de la fonction $x \mapsto g(|x|)$ 0.75pt

PROBLEME N°5 :

Soit la fonction g définie par $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2-3x+3}, & x \geq 0 \\ -x + \sqrt{x^2 - 2x}, & x < 0 \end{cases}$

1. Déterminer D_g et les limites à ses bornes.
2. Montrer que les droites $(\Delta) : y = x + 3$ et $(\Delta') : y = -2x + 1$ sont des asymptotes à (C_g) respectivement en $+\infty$ et en $-\infty$
3. Etudier la continuité et la dérivabilité de g en 0 .

Interpréter les résultats de la dérivabilité

4. Précisez le domaine de dérivabilité de g puis calculer $g'(x)$ sur chaque intervalle.
5. Dresser le tableau de variation de g

Soit K la restriction de g à $]-\infty ; 0]$

- a. Montrer que K réalise une bijection de $]-\infty ; 0]$ vers un intervalle J à préciser.
- b. K^{-1} est-elle dérivable en $2 + 2\sqrt{2}$? Si oui déterminer $(K^{-1})'(2 + 2\sqrt{2})$

PROBLEME N°6 :

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) , on considère la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4x^2}{x+1} & \text{si } x \leq 1 \\ \sqrt{x^2 + x + 2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

- 1) Déterminer D_f puis calculer les limites aux bornes
- 2) Étudier la continuité et la dérivabilité de f en 1.
- 3) Démontrer que les droites (Δ) et (Δ') d'équations respectives $y=4x-4$ et $y=x+\frac{1}{2}$ sont des asymptotes obliques à (C) respectivement en $-\infty$ et en $+\infty$.
- 4) Calculer $f'(x)$ dans les intervalles où f est dérivable. Étudier le signe de $f'(x)$
- 5) Dresser le tableau de variation de f .
- 6) Tracer la courbe (C_f) de f .
- 7) Soit g la restriction de f à l'intervalle $]1; +\infty[$

Montrer que g est bijective de I vers un intervalle J à déterminer.

PROBLEME N°7 :

Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = x + \sqrt{x|x| + 1} & \text{si } x \geq -1 \\ f(x) = (x+1) \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} & \text{si } x < -1 \end{cases}$$

- 1) Déterminer D_f et écrire f sans la valeur absolue
- 2) Étudier la continuité de f en 0 et en -1
- 3) Étudier la dérivabilité de f en 0 et en -1 puis interpréter graphiquement les résultats
- 4) Donner la nature des branches infinies
- 5) Étudier la position de C_f par rapport à ses asymptotes
- 6) Calculer f' dans les intervalles où f est dérivable
- 7) Dresser le tableau de variation
- 8) Soit h la restriction de f sur $[0; +\infty[$

- Montrer que h est une bijection de $[0; +\infty[$ vers un intervalle à préciser
- Sur quel intervalle h^{-1} est-elle dérivable ?
- Calculer $h(1)$ puis $h^{-1}(2 + 2\sqrt{2})$
- Tracer C_f et $C_{h^{-1}}$ dans un même repère.

PROBLEME N°8 :

Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = \cos 4x + 2 \sin 2x$$

- Justifier le choix de $I = [0; \pi]$ comme intervalle d'étude
- Montrer que $f'(x) = 4\cos 2x(1 - 2\sin 2x)$
- Résoudre dans I l'équation $f'(x) = 0$
- Donner le tableau de variation de f
- Montrer que la droite d'équation $x = \frac{\pi}{4}$ est axe de symétrie à C_f
- Tracer C_f dans un repère

PROBLEME N°9 :

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{2\sin 2x}{1 + \cos x}$$

- Déterminer le domaine de définition de f puis montrer que l'intervalle d'étude peut être réduit à $E = [0; \pi]$
- Déterminer la limite de f en π
- Soit α l'unique réel de E tel que $\cos \alpha = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. Montrer que pour tout $x \in [0; \alpha]$, $\cos^2 x + \cos x - 1 > 0$
- Montrer que $f'(x) = \frac{4(\cos^2 x + \cos x - 1)}{1 + \cos x}$ puis en déduire le signe de f' ainsi que le tableau de variation de f sur E
- Tracer C_f sur $]-\pi; \pi[$

PROBLEME N°10 :

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \cos^3 x - 3\cos x + 1$$

- Déterminer D_f
- Etudier la dérivabilité de f sur D_f et montrer que $f'(x) = 3 \sin^3 x$

3) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution $\alpha \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

4) Montrer que $\cos \alpha = \frac{1}{2+\sin^2 \alpha}$

5) Montrer que pour tout $x \in Df$; $|f'(x)| \leq 3$

6) Soit $x > 0$. En utilisant le théorème de l'inégalité des accroissements finis, montrer que sur $[0; x]$:

$$|\cos^3 x - 3\cos x + 2| \leq 3x$$

