

FICHE PREPA COMPO 1^{ER} SEMESTRE N°3

THEME : NOMBRES COMPLEXES

EXERCICE 1 :

I. On pose : $f(z) = z^3 + 4(1-i)z^2 - 2(2+7i)z - 16 + 8i$

1. Montrer que qu'il existe un réel r , et un seul, tel que $f(r) = 0$
Déterminer alors les nombres complexes a et b tels que :

0,75 pt

$$\forall z \in \mathbb{C} : f(z) = (z-r)(z^2 + az + b)$$

0,75 pt

2. Résoudre, dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = 0$

1 pt

II.

1. Déterminer le module et un argument de $\frac{8+8i}{\sqrt{3}-i}$

0,75 pt

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^5 = \frac{8+8i}{\sqrt{3}-i}$

1 pt

3. Soit A, B, C, D et E les images respectives des solutions de cette équation, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
Quelle est la nature du polygone ABCDE ?

0,25 pt

EXERCICE 2 :

PARTIE A :

Soit le nombre complexe $Z = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$.

- 1) Déterminer de deux façons différentes les racines carrées complexes de Z . (on les écrira d'abord sous forme trigonométrique, ensuite sous forme algébrique).

1,25pt + 1,75pt

- 2) En déduire les valeurs exactes de $\cos \frac{\pi}{8}$, $\sin \frac{\pi}{8}$ et $\tan \frac{\pi}{8}$. (**NB** : écrire $\tan \frac{\pi}{8}$ sans radical au dénominateur).

0,5pt + 0,5pt + 1pt

PARTIE B ;

On considère le polynôme de variable complexe z défini par : $P(z) = 2z^3 + 14z^2 + 41z + 68$.

1) Montrer que pour tout complexe z , on a : $P(z) = (z + 4)(2z^2 + 6z + 17)$. 0,5pt

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$. 1,5 pt

3) On note z_1, z_2 et z_3 les solutions de $P(z) = 0$ sachant que z_1 est réelle et $\text{Im}(z_2) > 0$.

On appelle A, B et C les points d'affixes respectives z_1, z_2 et z_3 dans le plan complexe.

a) Calculer $\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1}$. 0,75pt

b) Que peut-on en déduire pour le triangle ABC ? 0,25pt

c) Déterminer les points D et E tels que le quadrilatère BCDE soit un carré de centre A. 0,75pt x2

d) Faire une figure en plaçant les points A, B, C, D et E dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct (O ; $\vec{u}, \vec{v}$). 0,5pt

EXERCICE 3 :

PARTIE A :

z est un nombre complexe différent de 1.

1. Démontrer que pour tout n entier naturel non nul $1 + z + z^2 + \dots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$

2. En déduire le calcul de S et S' tel que :

$$S = 1 + i + i^2 + \dots + i^{1999}$$

$$S' = 1 - i + i^2 + \dots + (-i)^{1999}$$

PARTIE B ;

On considère le polynôme P de la variable complexe z défini par $P(z) = 2z^4 - 6z^3 + 9z^2 - 6z + 2$

1. Démontrer que si z_0 est racine de ce polynôme, les nombres $\frac{1}{z_0}$ et $\overline{z_0}$ sont aussi racine de ce polynôme.

2. Calculer $(1 + i)^2$; $(1 + i)^3$; $(1 + i)^4$ puis $P(1 + i)$

3. En déduire la résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P(z) = 0$ dont on admettra qu'elle a quatre solutions distinctes.

PARTIE C :

$\overline{z}$ désigne le nombre complexe conjugué de z . On appelle Z le nombre complexe défini par :

$$Z = z^2 - 2\overline{z} + 1$$

1. On pose $z = x + iy$ où x et y sont des nombres réels. Calculer en fonction de x et y la partie réelle X et la partie imaginaire Y du nombre complexe Z .

2. Déterminer, puis représenter dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal, l'ensemble des points dont l'affixe z et telle que Z soit un nombre réel.

3. Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que $Z = 0$.

4. Soit A, B, C les images respectives des nombres complexes : 1 ; $-1 + 2i$; $-1 - 2i$. Placer les points A, B, C et montrer que le triangle ABC est rectangle isocèle.

EXERCICE 4 :

Le plan est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On considère les points A, B, C d'affixes respectives.

$$Z_A = (3\sqrt{3} - 2) + i(3 + 2\sqrt{3}) ; Z_B = (-\sqrt{3} - 1) + i(\sqrt{3} - 1) \text{ et } Z_C = (1 - 4\sqrt{3}) + i(-4 - \sqrt{3})$$

1. a) Calculer $Z_A - Z_B + Z_C$.

b) En déduire que le point O est le barycentre du système de points pondérés (A ; 1), (B ; -1) et (C ; 1).

2. Soit l'ensemble C des points M du plan tels que :

$$\| \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \| = \| \overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \|$$

a) Vérifier que B appartient à C.

b) Déterminer l'ensemble C.

3. Déterminer l'ensemble (D) des points M du plan tel que :

$$2\| \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \| = \| \overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} \|.$$

EXERCICE 5 :

PARTIE A :

On considère deux nombres complexes U et V définis par

$$U = 1 + i\sqrt{3} ; V = 5 - 5i$$

1. Ecrire U et V sous forme trigonométrique

2. On pose $Z = U \times V$

a) Ecrire Z sous forme algébrique

b) Ecrire Z sous forme trigonométrique

3. En déduire les valeurs exactes de $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$

4. Soit un entier naturel n. Déterminer n pour que :

a) U^n soit réel

b) U^n soit imaginaire pur

PARTIE B :

Dans le plan complexe, on désigne par M le point d'affixe Z

Déterminer et construire l'ensemble des points M pour que le nombre complexe

$Z + \frac{9}{Z}$ soit un nombre réel. Z

PARTIE C :

On désigne par (E) l'équation suivante : $Z^3 - 3Z^2 + (3 + i)Z - 2 - 2i = 0$

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation E sachant qu'elle admet une racine réelle.
2. Ecrire chacune des solutions de (E) sous forme trigonométrique et ensuite sous exponentielle.
3. Soit U le produit des trois nombres complexes solutions de l'équation (E) déterminer les racines cinquièmes du nombre complexe U.
4. A, B, et C désignent es points images des solutions de (E) déterminer suivant les valeurs du paramètre réel k, l'ensemble des points M du plan tels que $MA^2 + MB^2 + MC^2 = k$

EXERCICE 6 :

PARTIE A :

I. On considère les transformations f, g et h du plan d'écritures complexes respectives :

$$z' = \frac{1}{2}(-\sqrt{2} + i\sqrt{2})z - 2 + \sqrt{2} - i\sqrt{2} ; z' = -2z + 3 - 6i ; z' = z + 2 - 4i$$

1. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f, g et h.

2. On désigne par L le point d'affixe $-2 - i\sqrt{2}$.

Déterminer les coordonnées du M point tel que $f(M) = L$

II. Déterminer et représenter l'ensemble E des points d'affixe z du plan complexe tel que les points d'affixes i, z et iz soient alignés.

PARTIE B :

1. Déterminer les racines cubiques de -64.

Dans le plan complexe muni d'un repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 1 cm, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = 2 - 2i\sqrt{3}$; $b = \bar{a}$ et $c = -4$.

2. a. Calculer le module et l'argument principal de a.

Placer avec précision les points A, B et C dans le plan complexe.

b. Calculer le nombre complexe $q = \frac{a - c}{b - c}$

et déterminer le module et un argument de q.

En déduire la nature du triangle ABC.

3. On désigne par M le point d'affixe z.

a. Exprimer en fonction de z les affixes des vecteurs

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} \text{ et } \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}$$

b. Déterminer et construire l'ensemble ($\mathcal{E}$) des points M du plan tel :

$$\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}\|$$

EXERCICE 7 :

1. On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation:

$$(E): z^3 - (2 + 3i)z^2 + (4 + 6i)z - 8 = 0$$

- a. Démontrer que (E) admet une solution réelle et une seule. 1pt
 - b. Résoudre (E) dans $\mathbb{C}$. 1.5pt
 - c. Soient A, B et C les points images des solutions de (E) dans le plan complexe. Démontrer que A, B et C appartiennent au cercle centré au point d'affixe $\frac{3}{2}i$. 1.5pt
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^6 - (2 + 3i)z^4 + (4 + 6i)z^2 - 8 = 0$. 1pt.

EXERCICE 8 :

1. On considère dans l'équation d'inconnue Z : (E) $Z^3 - 12Z^2 + 48Z - 128 = 0$

a. Vérifier que 8 est solution de cette équation. Déterminer les nombres réels α, β, γ tels que, pour tout complexe Z , $Z^3 - 12Z^2 + 48Z - 128 = (Z - 8)(\alpha Z^2 + \beta Z + \gamma)$.

b. Résoudre l'équation (E).

2. $(O; \vec{u}, \vec{v})$ est un repère orthonormal direct du plan orienté, l'unité graphique est 1 cm. On considère les points A, B, C d'affixes respectives $a = 2 - 2i\sqrt{3}, b = 2 + 2i\sqrt{3}, c = 8$.

a. Calculer le module de a (noté $|a|$) et son argument θ . Placer les trois points A, B et C .

b. Calculer le complexe $q = \frac{a-c}{b-c}$, déterminer son module et son argument θ . En déduire la nature du triangle ABC .

EXERCICE 9 :

θ désigne un nombre réel appartenant à l'intervalle ouvert $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$. On considère l'équation (E) d'inconnue z : (E) $z^2 - 2z + 1 + \tan^2 \theta = 0$

- 1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E). [0.75pt]
On considère deux nombres complexes $z_1 = 1 + i \tan \theta$ et $z_2 = 1 - i \tan \theta$.
- 2. (a) Ecrire z_2 en fonction de z_1 . [0.25pt]
(b) Déterminer $z_1 + z_2$ et exprimer $z_1^2 + z_2^2$ et $z_1 z_2$ en fonction de θ . [0.75pt]
(c) Pour quelles valeurs de θ a-t-on $z_1^2 + z_2^2 = 0$? [0.25pt]
(d) Calculer le module de z_1 en fonction de $\tan \theta$ puis en fonction de $\cos \theta$. [0.75pt]
(e) Montrer qu'un argument de z_1 est θ . [0.5pt]
(f) En déduire qu'un argument de z_2 est $-\theta$. [0.25pt]

3. On considère les points A et B d'affixes respectives z_1 et z_2 .
- (a) Déterminer un argument α de $\frac{z_1}{z_2}$. [0.25pt]
 - (b) Donner une interprétation géométrique de $\arg \frac{z_1}{z_2}$. [0.25pt]
 - (c) Quelle est la nature du triangle OAB ? [0,5pt]
 - (d) Pour quelle(s) valeur(s) de θ , OAB est un triangle équilatéral? [0.5pt]
4. On suppose que $\theta = \frac{-\pi}{4}$.
- (a) Montrer que : $z_1 = 1 - i$ et $z_2 = 1 + i$ [0.25pt]
 - (b) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tel que : $|z - 1 + i| = 2$. [0.5pt]
 - (c) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z ($z \neq 1 + i$) tel que : $\frac{z-1+i}{z-1-i}$ soit un nombre réel. [0.75pt]

EXERCICE 10 :

1. a. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation (E) :
 $z^2 + 2iz - 5 = 0$
 On note z_1 la solution de (E) dont la partie réelle est strictement négative et z_2 l'autre solution. Le plan est rapporté à un repère orthonormé (O, e_1, e_2)
- b. Placer les points A, B et C d'affixes respectives $(2\sqrt{3} - 1)i, z_1$ et z_2
2. a. Démontrer que le triangle ABC est équilatéral.
- b. Construire le point G , isobarycentre des points A, B et C ; puis calculer AG .
3. Déterminer puis tracer l'ensemble des points du plan tels que :
 $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 32$

EXERCICE 11 :

Dans cet exercice, z désigne un nombre complexe quelconque et (P) le plan complexe muni d'un repère orthonormé $R(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$

1. a) Développer, réduire et ordonner par rapport aux puissances décroissantes de z l'expression : $(z + 2)(z^2 - 6z + 34)$
- b) Soit (E) l'équation $z^3 - 4z^2 + 22z + 68 = 0$
 Démontrer que (E) admet un entier comme solution
- c) Résoudre (E) dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes.
2. A, B et C désignent trois points de (P) d'affixes respectives $-2 ; 3+5i ; 3-5i$.
 La droite (BC) coupe l'axe des abscisses en K
- a) Quelle est la nature du triangle ABC ? Justifier votre réponse

EXERCICE 12 :

On considère les nombres complexes $z_1 = 3\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et $z_2 = 3\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

1. a) Mettre sous forme trigonométrique les trois nombres complexes z_1 , z_2 et $z = \frac{z_1}{z_2}$
b) Démontrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, z^{12n} est un réel
2. a) Donner la forme algébrique de $\frac{z_1}{z_2}$
b) En déduire les valeurs exactes des $\cos \frac{5\pi}{12}$ et $\sin \frac{5\pi}{12}$

EXERCICE 13 :

Soit le polynôme $P(Z) = 2Z^3 - 4Z + \lambda$ où Z désigne un nombre complexe et où λ est un nombre réel.
On considère l'équation (E) : $P(Z) = 0$

1. a) Montrer que si (E) admet une solution complexe Z_0 , alors $\overline{Z_0}$ est aussi solution de (E) 0,5 pt
b) En déduire que l'équation (E) admet au moins une solution réelle. 0,5 pt
On ne demande pas de la déterminer.
2. a) Déterminer λ pour que l'équation (E) admette comme solution réelle 2 0,5 pt
b) Résoudre l'équation (E) pour la valeur de $\lambda = 0$ 0,5 pt
3. On donne $\lambda = 8$
a) Vérifier que $1+i$ est une solution de (E) 0,5 pt
b) Résoudre alors l'équation (E) 1,75 pt
c) Déterminer le module et un argument à chaque solution de (E) 0,75 pt

EXERCICE 14 :

1. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ les équations :
 $(E_1) : Z^2 + 2Z\sqrt{3} + 4 = 0$ et $(E_2) : Z^2 - 2Z\sqrt{3} + 4 = 0$. 1 pt
2. Pour tout nombre complexe Z , on pose $P(Z) = Z^4 - 4Z^2 + 16$ et on considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $P(Z) = 0$.
a. Montrer qu'il existe deux valeurs du réel a tel que :
 $P(Z) = (Z^2 + aZ + 4)(Z^2 - aZ + 4)$. 1 pt
b. En déduire les solutions de l'équation (E). 0,5 pt
3. Soient A ; B ; C ; D ; E et F les points d'affixes respectives : $\sqrt{3} + i$; $2i$; $-\sqrt{3} + i$; $-\sqrt{3} - i$; $-2i$; et $\sqrt{3} - i$ dans le plan muni du repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
a. Montrer que ces points appartiennent au cercle de centre O et de rayon 2 . 0,75 pt
b. Placer ces points dans le plan. 1 pt
c. Montrer que ABCDEF est un hexagone régulier. 0,75 pt

EXERCICE 15 :

Le plan est rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, (unité sur les axes 1cm). On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation $(e) : z^2 + (-7 + i)z + 12 - 16i = 0$.

- (a) Calculer $(5 + 5i)^2$. [0,5pt]
(b) Résoudre l'équation (e) dans $\mathbb{C}$. [1pt]
- Soient les points A et B d'affixes respectives $1 - 3i$ et $6 + 2i$. Calculer $\frac{z_O - z_B}{z_O - z_A}$; où z_O, z_A et z_B désignent les affixes respectives des points O, A et B ; en déduire la nature du triangle OAB . [0.75pt]
- Que représente le point I d'affixe $\frac{7}{2} - \frac{1}{2}i$ pour le segment $[AB]$? [0.5pt]
- Soit (Γ) l'ensemble des points M d'affixes z tels que $|z - \frac{7}{2} + \frac{1}{2}i| = \frac{5\sqrt{2}}{2}$.
 - Dire si chacune des propositions suivantes est vraie ou fausse. [0.75pt]
 - $O \in (\Gamma)$;
 - $A \in (\Gamma)$;
 - $B \in (\Gamma)$.
 - Donner une équation cartésienne de (Γ) et construire (Γ) . [1pt]

EXERCICE 16 :

Soit P un plan affine muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. A tout nombre complexe $z \neq -i$, on associe $f(z) = \frac{iz}{z+i}$. On note M le point d'affixe $z = x + iy$ où x et y sont des nombres réels.

- Déterminer l'affixe z_0 du point B tel que $f(z_0) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$. [0.75pt]
- On note r le module de $z + i$ et α son argument principal. Ecrire en fonction de r et α une forme trigonométrique de $f(z) - i$. [0.75pt]
- Soit A le point d'affixe $-i$.
 - Déterminer l'ensemble (C) des points M d'affixe z vérifiant l'égalité $|f(z) - i| = 1$. [1pt]
 - Montrer que la droite (T) d'équation $\sqrt{3}x - y - 3 = 0$ est tangente à (C) en B .
- Construire $A, B, (T)$ et (C) . [1.5pt]

EXERCICE 17 :

- Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation : $2z^2 - 2iz - 1 = 0$. [1,5pt]
- Le plan orienté étant rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, on considère les points A et B d'affixes respectives $\frac{-1+i}{2}$ et $\frac{1+i}{2}$.
Démontrer que OAB est un triangle rectangle de sommet principal O . [1pt]
- On pose $Z = \frac{-1+i}{1+i}$.
 - Ecrire Z sous la forme trigonométrique. [0,5pt]
 - En déduire les racines cubiques de Z sous la forme trigonométrique puis sous la forme algébrique. [1,5pt]

EXERCICE 18

A- On considère le polynôme p défini par $p(z) = z^3 - 3z^2 - 3z + 5 + 20i$, z étant un nombre complexe.

1. Montrer que $1 + 2i$ est une racine de p . [0,5pt]
2. Trouver deux nombres complexes a et b tels que, pour tout nombre complexe z , on ait $p(z) = (z - 1 - 2i)(z^2 + az + b)$. [0,75pt]
3. En déduire dans l'ensemble des nombres complexes, les solutions de l'équation $p(z) = 0$. [0,75pt]

B- Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$; on prendra 1 cm pour unité graphique.

1. Placer les points A , B et C d'affixes respectives $a = 1 + 2i$, $b = -2 - i$, et $c = 4 - i$ dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$. [0,75pt]
2. Soit D le point d'affixe $2 + 3i$; montrer que A , B et D sont alignés. [0,5pt]
 - (a) Calculer $\frac{b-a}{c-a}$, mettre le résultat sous la forme algébrique puis sous la forme trigonométrique. [1pt]
 - (b) En déduire la nature exacte du triangle ABC . [0,75pt]

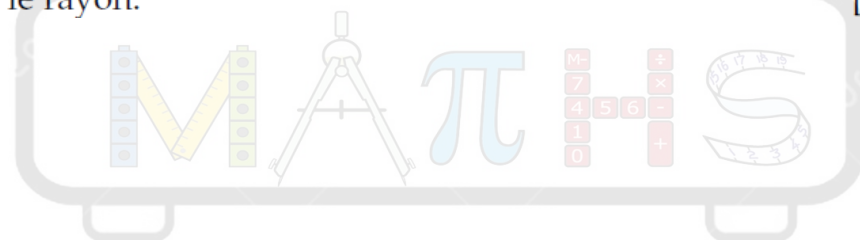
EXERCICE 19 :

On considère l'application t de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par : $t(z) = 9z^2 - 24z^3 + 50z^2 - 24z + 41$.

1. Montrer que si z_0 est une racine de t , alors $\bar{z}_0$ est aussi une racine de t . [0,5pt]
2. Vérifier que i est une racine de t et en déduire une autre racine de t . [0,5pt]
3. Déterminer trois nombres complexes a , b et c tels que $\forall z \in \mathbb{C}$, $t(z) = (z^2 + 1)(az^2 + bz + c)$. [0,75pt]
4. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $t(z) = 0$. [1pt]
5. Le plan complexe est rapporté à un repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique : 3cm).

On désigne par A , B , C et D les points d'affixes respectives $z_A = -i$, $z_B = i$, $z_C = \frac{4}{3} + \frac{5}{3}i$ et $z_D = \frac{4}{3} - \frac{5}{3}i$.

- (a) Placer les points A , B , C et D . [0,5pt]
- (b) Montrer que $\frac{z_C - z_A}{z_D - z_A} \in i\mathbb{R}$ et $\frac{z_C - z_B}{z_D - z_B} \in i\mathbb{R}$ où $i\mathbb{R}$ est l'ensemble des imaginaires purs. [0,5pt]
- (c) En déduire la nature exacte des triangles ACD et CBD . [0,5pt]
- (d) Montrer que les points A , B , C et D appartiennent à un même cercle dont on précisera le centre et le rayon. [0,75pt]



EXERCICE 20 :

On considère les nombres complexes $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 2 + 2i$ et $z_3 = -\sqrt{3} + i$.

- Calculer et mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants :
 $z_1 + 2z_2$; $z_1 \bar{z}_2$; $\frac{1}{z_1} - \frac{1}{z_3}$; $(z_1)^6$; $\frac{z_3}{z_2}$ et $|z_2| \bar{z}_1$. 6x0,5pt
- Ecrire sous forme trigonométrique z_1 et z_3 , puis en déduire la forme trigonométrique de $z_1 z_3$. 1,5pt
- Soient A , B et C trois points d'affixes respectives z_1 , z_2 et z_3 .
 - Déterminer l'affixe du barycentre G des points pondérés $(A, 2)$; $(B, -1)$ et $(C, 3)$. 0,75pt
 - Calculer l'affixe du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme. 0,75pt

EXERCICE 21 :

PARTIE A :

- On rappelle que : $\cos a \sin b = \frac{1}{2} [\sin(a + b) - \sin(a - b)]$.
 - Linéariser $\sin^3 x$ 1.5pt
 - En déduire une linéarisation de $\cos x \sin^3 x$. 1.5pt
- Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$; on donne les nombres complexes $Z_1 = -2 + 3i$, $Z_2 = 1 - i$ et $Z_3 = -1 - 2i$.
 - Placer dans le repère les points A , B et C points images respectifs des complexes Z_1, Z_2 et Z_3 0.75pt
 - Déterminer le module et un argument de Z_2 1pt
 - Déduire le module et un argument du complexes $Z = (1 - i)^5$ 1pt
 - Donner la forme exponentielle du complexe Z 0.75pt

PARTIE B :

On considère le nombre complexe $Z = \frac{\sqrt{3}-i}{1+i}$

- Déterminer la forme algébrique du complexe Z 1.5pt
- On pose $Z_1 = \sqrt{3} - i$ et $Z_2 = 1 + i$
 - Déterminer le module et un argument de chacun des nombres complexes Z_1 et Z_2 2pts
 - Déduire le module et un argument de Z 1pt
- Donner la forme trigonométrique du complexe Z 1pt
- Déduire les valeurs exactes de $\cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(-\frac{5\pi}{12}\right)$ 1.5pt
- Quelle est le plus petit entier naturel p non nul pour lequel Z^p est un réel

EXERCICE 22 :

PARTIE A :

- 1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 4z + 8 = 0$
Donner les solutions sous forme trigonométrique.
- 2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z suivante :
 $3iz + (1 + i)\bar{z} + 1 = -8 - 8i$ où $\bar{z}$ est le conjugué de z .
- 3) Déterminer les racines carrées de i sous forme algébrique.
- 4) Soit x un nombre réel. Linéariser $\cos 2x \sin^3 x$.

PARTIE B :

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O ; I, J)$. Les points J et P ont pour affixes respectives i et $-1-2i$.

- 1) Déterminer l'ensemble (C) des points M du plan d'affixe z telle que : $|z - i| = \sqrt{10}$. **0,5pt**
- 2) Justifier que P est un point de (C) . Placer P et tracer (C) dans le repère. **1pt**
- 3) Déterminer par calcul les coordonnées des points d'intersection de (C) avec l'axe des abscisses. **0,75pt**
- 4) Déterminer l'affixe du point Q image de P par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$ puis en déduire la nature du triangle OQP . **1,5pt**
- 5) Déterminer l'affixe du centre de gravité G du triangle JPQ . **0,75pt**

PARTIE C :

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O ; I, J)$. On considère le nombre complexe $m = 1 + i\sqrt{3}$ et les points A, B, C et D d'affixes respectives : $z_A = m, z_B = -m, z_C = m^2$ et $z_D = \frac{2}{m}$.

- 1) Déterminer le module et un argument de chacun des nombres complexes z_A, z_B, z_C et z_D . **2pts**
- 2) Donner la notation exponentielle de chacun des nombres complexes z_A et z_D . **0,5pt**
- 3) Placer les points A, B, C et D dans le repère. **1pt**
- 4) Calculer le rapport $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ et en déduire la nature du triangle ABC . **1pt**
- 5) Démontrer que les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle dont on déterminera l'affixe du centre K et le rayon. **2pts**

EXERCICE 23 :

1. Soit P le polynôme défini par : $P(z) = z^4 - 1$ où $(z \in \mathbb{C})$
 - a. Factoriser $P(z)$ sous forme d'un produit de quatre polynômes du premier degré dans $\mathbb{C}$
 - b. En déduire les solutions de l'équation $z^4 - 1 = 0$
2. On considère l'équation $(E) : z^4 = 8(1 - i\sqrt{3})$, on pose $t = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}$
 - a. Vérifier que t est solution de (E)
 - b. Montrer que z_0 est solution de (E) si et seulement si $z_0 t$ est solution de (E)

b. En déduire sous la forme exponentielle les solutions de (E) .

4. Déterminer les valeurs exactes de $\cos \frac{11\pi}{12}$ et $\sin \frac{11\pi}{12}$

EXERCICE 24 :

Soit le polynôme $P(z) = 2z^3 - 4z + \lambda$, où z désigne un nombre complexe et où λ est un nombre réel. On considère l'équation $(E) : P(z) = 0$

1.
 - a. Montrer que si (E) admet une solution complexe z_0 , alors $\overline{z_0}$ est aussi solution de (E)
 - b. En déduire que l'équation (E) admet au moins une solution réelle. On ne demande pas de la déterminer.
2. On donne $\lambda = 8$
 - a. Vérifier que $1 + i$ est solution de (E)
 - b. Résoudre alors l'équation (E)
 - c. Déterminer le module et un argument de chaque solution de (E)
 - a. Déterminer λ pour que l'équation (E) admette au moins une solution réelle $\sqrt{2}$
 - b. Résoudre l'équation (E) pour $\lambda = 0$

