

FICHE PREPA COMPO 1^{ER} SEMESTRE N°2

THEME : SUITES NUMERIQUES

EXERCICE 1 :

- Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$, on a :
 - $\sum_{k=1}^n k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$. 1pt
 - $10^n - 1$ est un multiple de 9. 1,5pt
 - $\sum_{k=1}^n k 2^{k-1} = (n-1) 2^n + 1$. 1,5pt
- Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 5$, on a : $2^n > 5(n+1)$. 1,5pt
- Soit (u_n) une suite définie par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = 2u_n - 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Démontrer par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^{n+1} + 1$. 1,5pt

EXERCICE 2 :

- Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, tracer la courbe représentative de la fonction u définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ par: $u(x) = \frac{2x+1}{x+2}$. 1pt
- Soit (u_n) la suite définie par:
$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{2u_n + 1}{u_n + 2} \end{cases}$$
 - Représenter sur l'axe des abscisses les termes: u_1, u_2 et u_3 . 1pt
 - Montrer que la suite (u_n) est croissante. 0,5pt
 - Montrer que pour tout entier naturel n , $0 \leq u_n < 2$ 1pt
 - En déduire que la suite (u_n) est convergente. 0,5pt
- Soit la suite (V_n) définie pour tout entier naturel n par: $v_n = \frac{1+u_n}{2-2u_n}$.
 - Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison. 0,5pt
 - Exprimer v_n , puis u_n en fonction de n . 0,5pt
 - En déduire la limite de (u_n) quand n tend vers $+\infty$. 0,5pt
- On pose $S_n = \sum_{k=0}^n v_k = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n$.
Exprimer S_n en fonction de n et déterminer sa limite quand n tend vers $+\infty$. 1pt

EXERCICE 3 :

- 1 Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, tracer la courbe représentative de la fonction u définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ par : $u(x) = \frac{2x+1}{x+2}$. 1pt

2 Soit (u_n) la suite définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{2u_n + 1}{u_n + 2} \end{cases}$$

- a. Représenter les termes : u_1 ; u_2 et u_3 dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. 0.75pt
- b. Montrer que la suite (u_n) est croissante. 0.5pt
- c. Montrer que pour tout entier naturel n , $0 \leq u_n < 2$ 0.5pt
- d. En déduire que la suite (u_n) est convergente. 0.5pt

3 Soit la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par : $v_n = \frac{1+u_n}{2-2u_n}$.

- a. Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison. 0.5pt
- b. Exprimer v_n , puis u_n en fonction de n . 0.5pt
- c. En déduire la limite de (u_n) quand n tend vers $+\infty$. 0.5pt

4 On pose $S_n = \sum_{k=0}^n v_k = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n$.

Exprimer S_n en fonction de n et déterminer sa limite quand n tend vers $+\infty$. 0.75pt

EXERCICE4:

1. Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ tracer la courbe représentative de la fonction u définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ par : $u(x) = \frac{2x+1}{x+2}$. 0,5 pt

2. Soit (u_n) la suite définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{2u_n + 1}{u_n + 2} \end{cases}$$

- a. Représenter sur l'axe des abscisses du repère précédent les termes : u_1, u_2, u_3 . 0,75pt
- b. Montrer que la suite (u_n) est croissante. 0,5 pt
- c. Montrer que pour tout entier naturel n , $0 \leq u_n < 2$. 0,25 pt
- d. En déduire que la suite (u_n) est convergente. 0,25 pt

3. Soit la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par : $v_n = \frac{1+u_n}{2-2u_n}$

- a. Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison. 0,5 pt
- b. Exprimer v_n , puis u_n en fonction de n . 0,5 pt
- c. En déduire la limite de (u_n) quand n tend vers $+\infty$. 0,25 pt

4. On pose $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_n$.

Exprimer S_n en fonction de n et déterminer sa limite quand n tend vers $+\infty$. 0,5 pt

EXERCICE 5 :

En 1990, un pays avait une population de 50 millions d'habitants. Par accroissement naturel, sa population augmente de 1,5% par an. Par ailleurs, on constate une augmentation annuelle supplémentaire de 0,45 million d'habitants dès l'année 1991. L'unité étant le million d'habitants ; on note $U_0 = 50$ l'effectif de la population en 1990 et U_n le nombre d'habitants en 1990 + n .

1. (a) Calculer U_1 et U_2 . [0.5pt]
(b) Montrer que $U_{n+1} = 1,01U_n + 0,45$. [0.75pt]
2. On se propose de prévoir directement l'effectif de la population en 2010 si le modèle d'évolution se poursuit de la même façon ; pour cela on considère la suite (V_n) définie par $V_n = 30 + U_n$.
 - (a) Calculer V_1 et V_2 . [0.5pt]
 - (b) Démontrer que la suite (V_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison. [0.75pt]
 - (c) Exprimer V_n puis U_n en fonction de n . En déduire alors l'effectif de la population de ce pays en l'an 2010. (On prendra le résultat arrondi en million d'habitants). [1.5pt]
 - (d) Déterminer par calcul à partir de quelle année l'effectif de la population de ce pays dépassera 100 millions d'habitants si l'évolution se poursuit de la même manière. [0.5pt]

EXERCICE 6 :

Les suites (U_n) et (V_n) sont définies sur $\mathbb{N}$ par :
$$\begin{cases} U_0 = 1 ; V_0 = 2 \\ U_{n+1} = \frac{U_n + V_n}{2} ; V_{n+1} = \frac{U_{n+1} + V_n}{2} \end{cases}$$

1. Démontrer qu'il existe un réel k tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, V_{n+1} - U_{n+1} = k(V_n - U_n)$ 0,5pt
2. Démontrer par récurrence que, $\forall n \in \mathbb{N}, U_n < V_n$ 0,5pt
3.
 - a. Démontrer que la suite (U_n) est croissante et (V_n) décroissante. 0,5pt × 2
 - b. En déduire que les suites (U_n) et (V_n) sont convergentes. 0,25pt × 2
4.
 - a. Soit $W_n = \sum_{p=0}^{n-1} (V_p - U_p)$. Donner l'expression de W_n en fonction de n . 0,75pt
 - b.
 - i. Exprimer $W_n = \sum_{p=0}^{n-1} (V_{p+1} - U_p)$ en fonction de w_n puis en fonction de U_n et U_0
 - ii. En déduire l'expression de U_n en fonction de n . 0,25pt
 - c. Quelle est la limite de la suite (V_n) , 0,5pt

EXERCICE 7 :

Soit (U_n) une suite définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $U_0 \in [-1; +\infty[$ et par la relation de récurrence $U_{n+1} = \sqrt{3U_n + 4}$

On considère la fonction $f(x) = \sqrt{3x + 4}$ définie sur $\left[-\frac{4}{3}; +\infty\right[$ et sa courbe (C_f)

1. Etudier les variations de f . déterminer l'abscisse α du point d'intersection de (C_f) et la droite (Δ) d'équation $y = x$
2. Etudier les variations de la suite (U_n) pour $U_0 \in [-1; \alpha[$ puis, pour $U_0 \in [\alpha; +\infty[$
3.
 - a. Pour $U_0 \in [-1; \alpha[$, montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, $0 \leq U_n \leq \alpha$
 - b. Pour $U_0 \in [\alpha; +\infty[$, montrer que, pour tout entier $n \geq 0$, $U_n \leq \alpha$
 - c. En déduire le comportement de la suite (U_n) quand n tend vers $+\infty$
4. Montrer que pour $n \geq 1$ on a $|4 - U_{n+1}| = \frac{|12 - 3U_n|}{4 + \sqrt{3U_n + 4}}$.
En déduire que pour tout entier $n \geq 1$ on a $|4 - U_{n+1}| \leq \frac{1}{2}|4 - U_n|$
5. Démontrer que, pour tout entier naturel n , on a $|4 - U_n| \leq \frac{|4 - U_0|}{2^n}$
6. Déterminer le plus petit entier naturel non nul n tel que $|4 - U_n| \leq 10^{-5}$

EXERCICE 8 :

On considère la suite (U_n) définie par $U_0 = \frac{1}{2}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_{n+1} = \frac{3U_n}{1 + 2U_n}$.

1. (a) Calculer U_1 et U_2 . 0,25pt
(b) Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < U_n$. 0,5pt
2. On admet que pour tout entier naturel n , $U_n < 1$.
(a) Démontrer que la suite (U_n) est croissante. 0,5pt
(b) Démontrer que la suite (U_n) est convergente. 0,25pt
3. Soit (V_n) la suite définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $V_n = \frac{U_n}{1 - U_n}$.
(a) Montrer que la suite (V_n) est une suite géométrique de raison 3. 0,5pt
(b) Exprimer pour tout $n \in \mathbb{N}$, V_n en fonction de n et en déduire que $U_n = \frac{3^n}{3^n + 1}$. 1pt
(c) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$. 0,5pt