- **Cours en ligne**
- **Cours presentiels**

MATHS

PC

SVT

La science autrement...

ELITE Science MATHS

Nos programmes:

Niveaux : Moyen/Secondaire

Programme Wolof

Apprentissage avec des cours exclusivement en Wolof

Programme Social

Prise en charge d'éléves avec des problèmes de moyens

Tous les élèves

Renforcement de capacité en ligne

Prépa Concours

Préparation des concours comme :
ESP - EMS - ENSA - IPSL
ISFAR ENSAE

77 106 98 79
77 575 04 18

ELITE SCIENCE
Cours en ligne et en présentiel
Tél : 77-106-98-79 (W)
76-870-60-77

MATHS

Cours : Tle S2

SYNTHESE NOMBRES COMPLEXES

• Forme algébrique

Tout nombre $Z \in \mathbb{C}$ pouvant s'écrire sous la forme $z = a + bi$ et $i^2 = -1$

Exemple : A=3+2i ; B=-5i

- **Partie réelle de z = Re(z)=a**
- **Partie imaginaire de z = Im(z)=b**

Dans notre exemple précédent ; 3 est la partie réelle de A et 2 est sa partie imaginaire

- Si b=0 ; z est un réel pur $(z \in \mathbb{R})$
- Si a=0 ; z est un imaginaire pur $(z \in i\mathbb{R})$

• **Nombre complexe nul**

Déf : z est nul sssi **Re(z)=Im(z)=0**

• **Nombres complexes égaux**

Déf : z=a+bi et z'=a'+b'i sont égaux sssi a=a' et b=b'

• **Représentation géométrique d'un nombre complexe**

- Sur un plan muni d'un repère imaginaire (repère orthonormé avec axe des abscisses = axe des réels et axe des ordonnées = axe des imaginaires)
- Un nombre complexe est défini par Re (z) = abscisse et Im(z)=ordonnée

• **Affixe d'un vecteur, d'un milieu, d'un barycentre :**

- Affixe d'un vecteur défini par deux points M et M' définis par z et z' $Z_{MM'}=z-z'$
- Affixe du milieu de MM' : $Z_i=\frac{z+z'}{2}$
- Si G bar {(A,a) ; (B,b) ; (C,c)}, et A(Z_A), B(Z_B) et C(Z_C), alors $Z_G=\frac{aZ_A+bZ_B+cZ_C}{a+b+c}$

• **Puissance de i**

Déf : périodique de période 4 : si $i^n=i^{4p+r}$ **alors** $=i^r$ **(Si *n*≥4 alors $i^n = i^r$ avec r le reste de la division euclidienne de *n* par 4)**

- **Calculs dans C :**

soient z=a+bi et z'=a'+b'i

  - **Z+Z' =(a+a')+i(b+b')**
  - **ZZ'=(aa'-bb')+i(ab'+a'b)**
  - $\frac{Z}{Z'}=\frac{aa'+bb'+i(a'b-ab')}{a'^2+b'^2}$

- **Nombres complexes conjugués**

Z=a+bi : $\bar{Z}$ = a-bi

  - Propriétés des complexes conjugués
    - $\overline{ZZ'}=\overline{Z}\times\overline{Z'}$
    - $\overline{Z+Z'}=\overline{Z}+\overline{Z'}$
    - $\overline{\overline{Z}}=Z$
    - $\overline{\frac{Z}{Z'}}=\frac{\overline{Z}}{\overline{Z'}}$
    - $Z+\overline{Z}=2a$
    - $Z-\overline{Z}=2bi$
    - $Z\overline{Z}=a^2+b^2$
    - **Z est réel si $\overline{Z}$ = Z**
    - **Z est imaginaire si $\overline{Z}$ = -Z**

- **Forme trigonométrique-forme exponentielle**
  - Module d'un nombre complexe
    - $|Z|=\sqrt{Z\overline{Z}}=\sqrt{a^2+b^2}$
    - **Interprétation géométrique : module =distance correspondant à l'affixe du nombre complexe**
    - **Propriétés**
      - **$|z|=|\overline{z}|$**
      - **$|zz'|=|z|x|z'|$**
      - **$|z^n|=|z|^n$**
      - **$\left|\frac{z}{z'}\right|=\frac{|z|}{|z'|}$ avec z'≠0**
      - **$|z+z'|\leq|z|+|z'|$**
    - Soient A (z_A), B(z_B), C(z_C) et M(z) :
      - **$|z_B - z_A|=AB$; $|z- z_A|=AM$; $\left|\frac{zc-za}{zb-za}\right|=\frac{AC}{AB}$**

- **Argument d'un nombre complexe**

Si M(z) se trouve dans un ROND $(\vec{u}.\vec{v})$; arg(z)= $(\vec{u}\ ;\overrightarrow{OM})$ [2π] : soit z=a+bi

$$\text{Arg(z)=}\Theta=\begin{cases} cos\Theta = \frac{a}{|z|} = \frac{Re(z)}{|z|} \\ sin\Theta = \frac{b}{|z|} = \frac{Im(z)}{|z|} \end{cases}$$

- Propriétés : soient z et z'
  - arg($\bar{z}$)= arg($\frac{1}{z}$)=-arg(z)
  - arg(zz')=arg(z)+arg(z')
  - arg(z^n)=n.arg(z)
  - arg($\frac{z}{z'}$)=arg(z)-arg(z')
  - arg(ib)=$\begin{cases} \frac{\pi}{2}\ si\ b>0 \\ -\frac{\pi}{2}\ si\ b<0 \end{cases}$
  - arg(a)=$\begin{cases} 0\ si\ a>0 \\ \pi\ si\ a<0 \end{cases}$
  - un nombre complexe non nul a une infinité d'arguments
  - un nombre complexe nul n'a pas d'arguments
  - l'ensemble des arguments de z est sous la forme Θ+2kπ (k∈Z)
  - arg(z)=0 : z∈R^*_+
  - arg(z)=π : z∈ R^*_-
  - arg(z)=π/2 : z∈iR^*_+
  - arg(z)=-π/2 : z∈i R^*_-
- **interprétation géométrique de l'argument :** soient A(z_A), B(z_B), C(z_C) et M(z)
  - arg(z)= $(\vec{u}\ ;\overrightarrow{OM})$ [2π]
  - arg(z_B-z_A)= $(\vec{u}\ ;\overrightarrow{AB})$ [2π]
  - arg($\frac{zc-za}{zb-za}$)= $(\overrightarrow{AB}\ ;\overrightarrow{AC})$ [2π]
  - arg($\frac{z-zb}{z-za}$)= $(\overrightarrow{MA}\ ;\overrightarrow{MB})$ [2π]
- **Lieux géométriques (Cf tableau)**
- **Forme trigonométrique**
  - Z= |z|(cosΘ+isinΘ) (avec Θ=arg(z))
- **Forme exponentielle**
  - Z=|z|eiΘ

- **Propriétés :**

Soient Θ et Θ'

- $e^{iΘ} \times e^{iΘ'} = e^{i(Θ+Θ')}$
- $e^{-iΘ} = \frac{1}{e^{iΘ}}$
- $e^{iΘ} / e^{iΘ'} = e^{i(Θ-Θ')}$
- $(e^{iΘ})^n = e^{inΘ}$
- **Conjugué de $e^{iΘ} = e^{-iΘ}$**

- **Formules de Moivre :**
  - $e^{iΘ} = \cos Θ + i \sin Θ$
  - $(e^{iΘ})^n = (\cos Θ + i \sin Θ)^n = e^{inΘ} = \cos nΘ + i \sin nΘ$
  - $(\cos Θ - i \sin Θ)^n = \cos nΘ - i \sin nΘ$
- **Formules d'Euler**
  - $\cos Θ = (e^{iΘ} + e^{-iΘ})/2$
  - $\sin Θ = (e^{iΘ} - e^{-iΘ})/2$

- **Equations dans C**
  - **Racines carrées d'un nombre complexe**

Soit Z=a+bi : les racines carrées de z sont sous la forme z=x+iy tels que $\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \\ 2xy = b \end{cases}$

  - **Equations du 2nd degré**

Cas 1 : Δ∈R

- Δ>0 : deux solutions réelles ; $z_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$
- Δ=0 ; une solution double $z_0 = \frac{-b}{2a}$
- Δ<0 ; deux solutions complexes conjuguées $z_1 = \frac{-b-i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b+i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$

Cas2 : Δ∈ℂ

- On cherche les racines carrées de Δ : soit α
- On a deux racines distinctes : $z_1 = \frac{-b-\alpha}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b+\alpha}{2a}$

- **Racines n-ièmes de l'unité ($z^n=1$)**

- Forme exponentielle : $Z= e^{\frac{i2k\pi}{n}}$ $k\in\mathbb{Z}$
- Pour trouver les racines nièmes de z on prend k=0, 1, ……n-1
- La somme des racines nièmes de l'unité est nulle

- **Racines nièmes d'un nombre complexe ($z^n=Z$)**

- Forme exponentielle **: $z=\sqrt[n]{|z|}e^{i(\frac{\alpha}{n}+\frac{2k\pi}{n})}$ avec α=argZ**
- On a exactement n racines n-ièmes de z

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$.
A, B, C et D sont les points du plan complexe d'affixes respectives $\mathrm{Z}_A, \mathrm{Z}_B, \mathrm{Z}_C$ et Z_D.
L'unité de mesure d'angle est le radian.

Concept Géométrique	**Relation Complexe**
I milieu de $[AB]$	$\mathrm{Z}_I = \dfrac{\mathrm{Z}_A + \mathrm{Z}_B}{2}$
Distance AB	$AB = \lvert \mathrm{Z}_B - \mathrm{Z}_A \rvert$
Vecteur $\overrightarrow{AB}$	$Z_{\overrightarrow{AB}} = \mathrm{Z}_B - \mathrm{Z}_A$
$mes(\vec{u};\overrightarrow{AB})$	$(\vec{u};\overrightarrow{AB}) = arg(\mathrm{Z}_B - \mathrm{Z}_A)[2\pi]$
$mes(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$	$(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) = arg\left(\dfrac{\mathrm{Z}_C - \mathrm{Z}_A}{\mathrm{Z}_B - \mathrm{Z}_A}\right)[2\pi]$
G est le barycentre du système $\{(A,a);(B,b);(C,c)\}$ $(a+b+c \neq 0)$	$\mathrm{Z}_G = \dfrac{a\mathrm{Z}_A + b\mathrm{Z}_B + c\mathrm{Z}_C}{a+b+c}$
A, B et C sont alignés	$\dfrac{\mathrm{Z}_C - \mathrm{Z}_A}{\mathrm{Z}_B - \mathrm{Z}_A} \in \mathbb{R}$
A, B, C et D sont cocycliques(appartiennent à un même cercle)	$\dfrac{\mathrm{Z}_C - \mathrm{Z}_A}{\mathrm{Z}_B - \mathrm{Z}_A} \times \dfrac{\mathrm{Z}_B - \mathrm{Z}_D}{\mathrm{Z}_C - \mathrm{Z}_D} \in \mathbb{R}$
$(AB) \parallel (CD)$	$\dfrac{\mathrm{Z}_D - \mathrm{Z}_C}{\mathrm{Z}_B - \mathrm{Z}_A} \in \mathbb{R}$
$(AB) \perp (CD)$	$\dfrac{\mathrm{Z}_D - \mathrm{Z}_C}{\mathrm{Z}_B - \mathrm{Z}_A} \in \mathrm{i}\mathbb{R}$
Le triangle ABC est isocèle en A	$\left\lvert \dfrac{\mathrm{Z}_C - \mathrm{Z}_A}{\mathrm{Z}_B - \mathrm{Z}_A} \right\rvert = 1$
Le triangle ABC est rectangle en A	$arg\left(\dfrac{\mathrm{Z}_C - \mathrm{Z}_A}{\mathrm{Z}_B - \mathrm{Z}_A}\right) = \dfrac{\pi}{2}[\pi]$
Le triangle ABC est équilatérale	$\dfrac{\mathrm{Z}_C - \mathrm{Z}_A}{\mathrm{Z}_B - \mathrm{Z}_A} = e^{\pm \mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$
Le triangle ABC est rectangle isocèle en A	$\dfrac{\mathrm{Z}_C - \mathrm{Z}_A}{\mathrm{Z}_B - \mathrm{Z}_A} = \pm \mathrm{i}$
Le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme	$\mathrm{Z}_B - \mathrm{Z}_A = \mathrm{Z}_C - \mathrm{Z}_D$

Recherche de Lieux Géométriques

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$.
A et B sont les points d'affixes respectives $\mathrm{Z}_A, \mathrm{Z}_B$, M est un point d'affixe Z et α un nombre réel.
L'unité de mesure d'angle est le radian.

Concept Géométrique	**Relation Complexe**	**L'ensemble des points M est :**
$AM = BM$	$\lvert \mathrm{Z} - \mathrm{Z}_A \rvert = \lvert \mathrm{Z} - \mathrm{Z}_B \rvert$	La médiatrice du segment $[AB]$
$AM = r\,;\ (r > 0)$	$\lvert \mathrm{Z} - \mathrm{Z}_A \rvert = r$	Le cercle de centre A et de rayon r
$\dfrac{MA}{MB} = k\,;$ $(k \in \mathbb{R}_+^*\text{-}\{1\})$	$\left\lvert \dfrac{\mathrm{Z} - \mathrm{Z}_A}{\mathrm{Z} - \mathrm{Z}_B} \right\rvert = k$	Le cercle de diamètre $[IJ]$ avec $I = bar\{(A,1);(B,k)\}$ et $J = bar\{(A,1);(B,-k)\}$
$(\vec{u};\overrightarrow{OM}) = \alpha[2\pi]$	$arg(\mathrm{Z}) = \alpha[2\pi]$	La demi-droite $[OI)$ privé du point O avec $\mathrm{Z}_I = e^{\mathrm{i}\alpha}$
$(\vec{u};\overrightarrow{OM}) = \alpha[\pi]$	$arg(\mathrm{Z}) = \alpha[\pi]$	La droite (OI) privé du point O avec $\mathrm{Z}_I = e^{\mathrm{i}\alpha}$
$(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}) = 0[2\pi]$	$arg\left(\dfrac{\mathrm{Z}_B - \mathrm{Z}}{\mathrm{Z}_A - \mathrm{Z}}\right) = 0[2\pi]$	La droite (AB) privé du segment $[AB]$
$(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}) = 0[\pi]$	$arg\left(\dfrac{\mathrm{Z}_B - \mathrm{Z}}{\mathrm{Z}_A - \mathrm{Z}}\right) = 0[\pi]$	La droite (AB) privé des points A et B
$(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}) = \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$	$arg\left(\dfrac{\mathrm{Z}_B - \mathrm{Z}}{\mathrm{Z}_A - \mathrm{Z}}\right) = \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$	Le démi cercle de diamètre $[AB]$ privé des points A et B
$(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}) = \dfrac{\pi}{2}[\pi]$	$arg\left(\dfrac{\mathrm{Z}_B - \mathrm{Z}}{\mathrm{Z}_A - \mathrm{Z}}\right) = \dfrac{\pi}{2}[\pi]$	Le cercle de diamètre $[AB]$ privé des points A et B
$(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}) = \pi[2\pi]$	$arg\left(\dfrac{\mathrm{Z}_B - \mathrm{Z}}{\mathrm{Z}_A - \mathrm{Z}}\right) = \pi[2\pi]$	Le segment $[AB]$ privé des points A et B