- Cours en ligne
- Cours presentiels

MATHS
PC
SVT

La science autrement...

ELITE Science

MATHS

Nos programmes:

Niveaux : Moyen/Secondaire

JANGOO

Programme Wolof

Apprentissage avec des cours exclusivement en Wolof

Educoeur

Programme Social

Prise en charge d'éléves avec des problèmes de moyens

R.E.L

Tous les élèves

Renforcement de capacité en ligne

PPC

Prépa Concours

Préparation des concours comme : ESP - EMS - ENSA - IPSL ISFAR ENSAE

77 106 98 79
77 575 04 18

COURS 1 : LIMITES ET CONTINUITE- RAPPELS ET COMPLEMENTS

I. CALCUL DE LIMITES

A. Opérations sur les limites

	U	V	U + V	U.V	$\frac{U}{V}$
1	r	r' ≠0	r+r'	r.r'	r/r'
2	r>0	0^+	r	0	+∞
3	r<0	0^+	r	0	-∞
4	r>0	0^-	r	0	-∞
5	r<0	0^-	r	0	+∞
6	0	0	0	0	
7	r>0	+∞	+∞	+∞	0
8	r<0	+∞	+∞	-∞	0
9	r>0	-∞	-∞	-∞	0
10	r<0	-∞	-∞	+∞	0
11	0	+∞	+∞		0
12	0	-∞	-∞		0
13	+∞	+∞	+∞	+∞	
14	+∞	-∞		-∞	
15	+∞	0^+	+∞		+∞
16	+∞	0^-	+∞		-∞
17	-∞	0^+	-∞		-∞
18	-∞	0^-	-∞		+∞

Remarque : les cellules noires correspondent à des formes indéterminées.

B. Techniques de calculs de limites

1. Règles de calcul de limites

- La limite d'une fonction polynomiale en l'infini est égale à la limite du monôme du plus haut degré :

Exemple : $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 + 3x^2 - 5 = \lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$

- Pour les monômes à puissance, si la limite tend vers +∞, aucun souci, on obtient généralement +∞ sauf dans le cas où il y'aurait un signe moins devant :

Exemples : $\lim\limits_{x \to +\infty} 2x^5 + 1 = \lim\limits_{x \to +\infty} 2x^5 = +\infty$

- Dans le cas où la limite tend vers -∞, si la puissance est paire la limite tend vers +∞ et si la puissance est impaire la limite tend vers -∞. Cependant si le monôme a un coefficient positif aucun changement à faire, mais si le coefficient est négatif, il faut tenir compte de la règle des signes :

- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} ax^n$
  - $\lim\limits_{x\to+\infty} ax^n$
    - $si\ a > 0$: $\lim\limits_{x\to+\infty} ax^n = +\infty$
    - $si\ a < 0$: $\lim\limits_{x\to+\infty} ax^n = -\infty$
  - $\lim\limits_{x\to-\infty} ax^n$
    - $si\ a > 0\ et\ n\ pair$: $\lim\limits_{x\to-\infty} ax^n = +\infty$
    - $si\ a > 0\ et\ n\ impair$: $\lim\limits_{x\to-\infty} ax^n = -\infty$
    - $si\ a < 0\ et\ n\ pair$: $\lim\limits_{x\to-\infty} ax^n = -\infty$
    - $si\ a < 0\ et\ n\ impair$: $\lim\limits_{x\to-\infty} ax^n = +\infty$

2. *Techniques*

a. Limites de fonctions rationnelles

i. Limite " $\frac{\infty}{\infty}$ "

Règle : on prend la limite des monômes du plus haut degré sur le numérateur et sur le dénominateur.

Exemples :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^4+3x-1}{x^3-5}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^4}{x^3}=\lim_{x\to+\infty}x=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-1}{x^3-5}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-1}{2x^2+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{2x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

ii. Limite " $\frac{0}{0}$ "

Règle : on procède à des factorisations des polynômes du numérateur comme du dénominateur puis on simplifie.

Exemples :

$$\lim_{x\to1}\frac{x^3-1}{x^2-3x+2}$$

Le calcul nous donne la FI 0/0. Pour lever l'indétermination, on se base sur le fait que 1 étant une racine aussi bien pour le numérateur que pour le dénominateur, ils sont donc factorisables par x-1 !

$$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1):(forme\ a^3-b^3)$$

$$x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$$

$$\frac{x^3-1}{x^2-3x+2}=\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x-2)}=\frac{x^2+x+1}{x-2}$$

$$\lim_{x\to1}\frac{x^3-1}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to1}\frac{x^2+x+1}{x-2}=\frac{1+1+1}{1-2}=-3$$

b. Limites de fonctions irrationnelles :

- Pour calculer $\lim\limits_{x \to a} \sqrt{f(x)}$ on calcule d'abord $\lim\limits_{x \to a} f(x)$

- Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b \in R+$ alors $\lim\limits_{x \to a} \sqrt{f(x)} = \sqrt{b}$
- $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x \to a} \sqrt{f(x)} = +\infty$

Rappel : une racine est toujours positive donc si f tend vers $-\infty$ alors la limite n'existe pas.

- **FI** $" + \infty - \infty"$

Elle est obtenue généralement avec les limites d'expression $\sqrt{ax^2 + bx + c} + dx + e$

Règle : on calcule le nombre N tel que $N = \sqrt{a} + d$

- Si N=0, on utilise l'expression conjuguée,
- Si N≠0, on effectue une factorisation de x.

Dans le cas de la factorisation de x, à l'intérieur de la racine on factorise x^2pour pouvoir séparer le x de l'expression en utilisant la propriété des racines $\sqrt{x^2} = |x|$

- Si $x \to +\infty, |x| = x$
- Si $x \to -\infty, |x| = -x$

Exemples :

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{2x^2 - 3} - 2x + 5 = \begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{2x^2 - 3} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} -2x + 5 = -\infty \end{cases}$$

Par somme $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{2x^2 - 3} - 2x + 5 = FI$ Levons l'indétermination

$N = \sqrt{2} - 2 \neq 0$ On effectue une factorisation de x

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{2x^2 - 3} - 2x + 5 = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2\left(2 - \frac{3}{x^2}\right)} - 2x + 5$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2} \times \sqrt{2 - \frac{3}{x^2}} - 2x + 5 = \lim_{x \to +\infty} |x| \times \sqrt{2 - \frac{3}{x^2}} - 2x + 5$$

$$Comme\ x \to +\infty, |x| = x$$

$$\lim_{x\to+\infty} x\sqrt{2-\frac{3}{x^2}}-2x+5=\lim_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{2-\frac{3}{x^2}}-2+\frac{5}{x}\right)$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{2-\frac{3}{x^2}}-2+\frac{5}{x}=\sqrt{2-0}-2+0=\sqrt{2}-2 \end{cases}$$

Par étude du signe on voit que $\sqrt{2}-2<0$

Par produit : $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{2-\frac{3}{x^2}}-2+\frac{5}{x}\right)=-\infty$

$$\mathbf{\lim_{x\to+\infty}\sqrt{2x^2-3}-2x+5=-\infty}$$

Remarque : le nombre N est calculé $\sqrt{a}+d$ si la limite tend vers +∞. Si la limite tend vers -∞ on fait $-\sqrt{a}+d$. Les interprétations restent valables.

- **FI " $\frac{\infty}{\infty}$ "**

Règle : on effectue une factorisation de x.

Exemple :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{3x^2+3x+2}}{2x+2}\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} 3x^2+3x+2=+\infty \rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{3x^2+3x+2}=+\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} 2x+2=+\infty \end{cases}$$ Par quotient

on a FI

Levons l'indétermination:

$$\frac{\sqrt{3x^2+3x+2}}{2x+2}=\frac{\sqrt{x^2\left(3+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}}{x\left(2+\frac{2}{x}\right)}=\frac{\sqrt{x^2}\times\sqrt{\left(3+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}}{x\left(2+\frac{2}{x}\right)}$$

$$\frac{|x|\times\sqrt{\left(3+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}}{x\left(2+\frac{2}{x}\right)}\ \text{comme } x\to+\infty, |x|=x$$

$$\frac{x\sqrt{\left(3+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}}{x\left(2+\frac{2}{x}\right)}=\frac{\sqrt{\left(3+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}}{\left(2+\frac{2}{x}\right)}$$

$$=\frac{\sqrt{\left(3+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}}{\left(2+\frac{2}{x}\right)}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\boldsymbol{\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{3x^2+3x+2}}{2x+2}=\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

- FI " $\frac{0}{0}$ "

Règle : on utilise l'expression conjuguée. Parfois il faut utiliser l'expression conjuguée du numérateur comme du dénominateur.

Exemple :

$$\lim_{x\to-5}\frac{\sqrt{-x}-\sqrt{5}}{x+5}=\begin{cases}\lim\limits_{x\to-5}\sqrt{-x}-\sqrt{5}=0\\ \lim\limits_{x\to-5}x+5=0\end{cases}$$ Par quotient on a FI

Levons l'indétermination

$$\frac{\sqrt{-x}-\sqrt{5}}{x+5}=\frac{(\sqrt{-x}-\sqrt{5})(\sqrt{-x}+\sqrt{5})}{(x+5)(\sqrt{-x}+\sqrt{5})}=\frac{-x-5}{(x+5)(\sqrt{-x}+\sqrt{5})}=\frac{-(x+5)}{(x+5)(\sqrt{-x}+\sqrt{5})}$$
$$=\frac{-1}{\sqrt{-x}+\sqrt{5}}$$

$$\lim_{x\to-5}\frac{\sqrt{-x}-\sqrt{5}}{x+5}=\lim_{x\to-5}\frac{-1}{\sqrt{-x}+\sqrt{5}}=-\frac{1}{2\sqrt{5}}=\frac{-\sqrt{5}}{10}$$

$$\boldsymbol{\lim_{x\to-5}\frac{\sqrt{-x}-\sqrt{5}}{x+5}=\frac{-\sqrt{5}}{10}}$$

<u>Remarque :</u> *cas particulier des racines cubiques*

La racine cubique fonctionne presque comme une racine carrée avec quelques particularités :

- $si\ a^3 = b\ alors\ a = \sqrt[3]{b}$
- $\sqrt[3]{-b} = -\sqrt[3]{b}$

<u>Règle :</u> rappel : $\boldsymbol{a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)}$

$$\boldsymbol{a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)}$$

L'astuce est de faire « sauter » la racine cubique en trouvant « l'expression conjuguée » permettant d'avoir a^3-b^3 soit $\boldsymbol{a^2 + ab + b^2}$**.** Dans certains cas où on aura affaire à la forme $\boldsymbol{a^3 + b^3}$ il suffira de trouver $\boldsymbol{a^2 - ab + b^2}$

Exemple :

$$\lim_{x\to -1} \frac{\sqrt[3]{7-x} - 2}{x+1}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to -1} = \sqrt[3]{7-x} - 2 = \sqrt[3]{7-(1)} - 2 = \sqrt[3]{8} - 2 = 0 \\ \lim\limits_{x\to -1} x + 1 = -1 + 1 = 0 \end{cases}$$

Par quotient on a FI. Levons l'indétermination :

$\boldsymbol{\frac{\sqrt[3]{7-x}-2}{x+1}}$**: On pose a=**$\boldsymbol{\sqrt[3]{7-x}}$ **et b=2**

$$\boldsymbol{a^2 + ab + b^2 = \left(\sqrt[3]{7-x}\right)^2 + 2\sqrt[3]{7-x} + 4}$$

Voici notre expression conjuguée!

$$\frac{\sqrt[3]{7-x} - 2}{x+1} = \frac{(\sqrt[3]{7-x} - 2)\left[\left(\sqrt[3]{7-x}\right)^2 + 2\sqrt[3]{7-x} + 4)\right]}{(x+1)\left[\left(\sqrt[3]{7-x}\right)^2 + 2\sqrt[3]{7-x} + 4)\right]}$$

$$= \frac{\left(\sqrt[3]{7-x}\right)^3 - 2^3}{(x+1)\left[\left(\sqrt[3]{7-x}\right)^2 + 2\sqrt[3]{7-x} + 4)\right]}$$

$$= \frac{7 - x - 8}{(x+1)\left[\left(\sqrt[3]{7-x}\right)^2 + 2\sqrt[3]{7-x} + 4)\right]}$$

$$= \frac{\boldsymbol{-x-1}}{(\boldsymbol{x+1})\left[\left(\sqrt[3]{7-x}\right)^2 + 2\sqrt[3]{7-x} + 4)\right]}$$

$$= \frac{-(\boldsymbol{x+1})}{(\boldsymbol{x+1})\left[\left(\sqrt[3]{7-x}\right)^2 + 2\sqrt[3]{7-x} + 4)\right]} = \frac{\boldsymbol{-1}}{\left(\sqrt[3]{\boldsymbol{7-x}}\right)^2 + \boldsymbol{2}\sqrt[3]{\boldsymbol{7-x}} + \boldsymbol{4}}$$

$$\lim_{x \to -1} \frac{\sqrt[3]{7-x} - 2}{x+1} = \lim_{x \to -1} \frac{-1}{\left(\sqrt[3]{7-x}\right)^2 + 2\sqrt[3]{7-x} + 4}$$

$$= \frac{-1}{2^2 + 2 \times 2 + 4} = -\frac{1}{4+4+4} = -\frac{1}{12}$$

$$\boldsymbol{\lim_{x \to -1} \frac{\sqrt[3]{7-x} - 2}{x+1} = -\frac{1}{12}}$$

c. *Limites trigonométriques*

$$\lim_{0} \frac{\sin x}{x} = 1 \; ; \; \lim_{0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0 \; ; \; \lim_{0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \; ; \; \lim_{0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

Généralement on se sert des limites usuelles. Parfois il nécessite d’effectuer des transformations. Dans d’autres cas au lieu de x on a une fonction f(x) : il faut juste s’assurer que f tend vers 0 si x tend vers x0.

Exemples :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sqrt{x}}$$

- $\frac{\tan x - \sin x}{\sqrt{x}} = \frac{\tan x}{\sqrt{x}} - \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$
- $\frac{\tan x}{\sqrt{x}} \times \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} - \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \times \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$
- $\frac{\tan x}{x} \times \sqrt{x} - \frac{\sin x}{x} \times \sqrt{x}$
- $\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} \times \sqrt{x} - \frac{\sin x}{x} \times \sqrt{x}$ = 1x0-1x0 =**0**

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - cos2x}{x^2}$$

- Rappel: cos2x=1-2sin^{2}x
- $\frac{1-cos2x}{x^2} = \frac{1-(1-2\sin^2 x)}{x^2} = \frac{1-1+2\sin^2 x}{x^2}$
- $\frac{2\sin^2 x}{x^2}$ = 2 x$(\frac{sinx}{x})^2$
- $\lim_{x \to 0}$ 2 x$(\frac{sinx}{x})^2$=2 x 1^2=**2**

3. Théorèmes sur les calculs de limites :

a. Théorème de comparaison :

Soient deux fonctions f(x) et g(x) définies sur un intervalle I :

- Si $f(x) \geq g(x)$ *et* $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ *alors* $\boldsymbol{\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$
- Si $f(x) \leq g(x)$ *et* $\lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$ *alors* $\boldsymbol{\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty}$

Exemple : soient $f(x) = \sqrt{x}$ et$g(x) = x^2$. On sait que$\forall\ x \in R +$

, $g(x) \geq f(x)$. Et comme $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$ *alors* $\lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$

b. Théorème des « gendarmes » ou du « sandwich »

Soient trois fonctions f(x), g(x) et h(x) définies sur un intervalle I tel que

$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$. **Si** $\boldsymbol{\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} h(x) = r}$ ***alors*** $\boldsymbol{\lim_{x \to +\infty} g(x) = r.}$

NB : ce théorème reste valable pour $x \to -\infty$ *ou* $x \to a\ \in R$.

Exemple : Calculons $\lim_{x \to +\infty} \frac{sinx}{x}$.

On sait que $-1 \leq sinx \leq 1 \to -\frac{1}{x} \leq \frac{sinx}{x} \leq \frac{1}{x}$

Comme $\lim_{x \to +\infty} \frac{-1}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$ donc d'après le théorème des gendarmes :

$$\boldsymbol{\lim_{x \to +\infty} \frac{sinx}{x} = 0}$$

- ***Théorème de la majoration : corollaire du théorème des gendarmes :***

Soient deux fonctions f(x) et g(x) et un réel a.

Si au voisinage de x_0, $|f(x) - a| \leq g(x)$ *et* $\lim_{x \to x0} g(x) = 0$ alors $\lim_{x \to x0} f(x) = a$

II. CONTINUITE

Soit f(x) défini dans Df ; f est continue en x_0 sssi $\begin{cases} x0 \in Df \\ \lim_{x0} f(x) = f(x0) \end{cases}$

- Continuité à gauche-à droite
  - $\lim_{x0-} f(x) = f(x0)$ = f est continu à gauche de x_0
  - $\lim_{x0+} f(x) = f(x0)$ = f est continu à droite de x_0
  - f est continu en x0 sssi $\lim_{x0-} f(x) = \lim_{x0+} f(x) = f(x0)$

- **prolongement par continuité :**

Si $x_0 \notin$ Df et $\lim_{x0} f(x) = l$ alors f est prolongeable par continuité et on définit g(x) le prolongement par continuité de f tel que : $\begin{cases} g(x) = f(x)\ pour\ tout\ x\ \neq x0 \\ g(x0) = l \end{cases}$

- **continuité sur un intervalle**
  - soit I= [a ; b] : f est continu sur I sssi
    - f est continu sur]a ; b [
    - f est continu à droite de a et à gauche de b
  - les polynômes sont continus sur R
  - les fonctions rationnelles, irrationnelles et circulaires sont continues sur leur domaine de définition
  - la somme, le produit et la composée de deux fonctions continues est continue

- **propriétés des fonctions continues : image d'un intervalle par une fonction continue et strictement monotone**

	F $\nearrow$	F $\searrow$
	F(I)	F(I)
[a ; b]	[f(a) ; f(b)]	[f(b) ; f(a)]
] a ; b [	$]\lim\limits_{a+} f(x)\ ;\ \lim\limits_{b-} f(x)[$	$]\lim\limits_{b-} f(x);\ \lim\limits_{a+} f(x)[$
[a ; b [	[f(a) ; $\lim\limits_{b-} f(x)$[	] $\lim\limits_{b-} f(x)$; f(a)]
] a ; b]	]$\lim\limits_{a+} f(x)$; f(b)]	[f(b) ; $\lim\limits_{a+} f(x)$ [
[a ; +∞ [	[f(a) ; $\lim\limits_{+\infty} f(x)$[	] $\lim\limits_{+\infty} f(x)$,f(a)]
]-∞ ; b]	]$\lim\limits_{-\infty} f(x)$; f(b)]	[f(b) ; $\lim\limits_{-\infty} f(x)$[
] a ; +∞ [	$]\lim\limits_{a+} f(x)\ ;\ \lim\limits_{+\infty} f(x)[$	$]\lim\limits_{+\infty} f(x)\ ;\ \lim\limits_{a+} f(x)\ [$
]-∞ ; b [	$]\lim\limits_{-\infty} f(x)\ ;\ \lim\limits_{b-} f(x)[$	$]\lim\limits_{b-} f(x)\ ;\ \lim\limits_{-\infty} f(x)\ [$

- **théorème des valeurs intermédiaires**
  - si f est continue sur I = [a ; b] et y0 ∈ [f(a) ; f(b)] alors il existe x_0 ∈I tel que $f(x_0)=y_0$
  - si f est continue sur I et f(a)xf(b) <0 alors l'équation f(x)=0 admet au moins une solution x_0 ∈ I

○ encadrement de la racine à N prés : technique du balayage

Exemple : soit f(x) = x^2-3x+1. On suppose que l'équation f(x)=0 admet une solution unique a dans I=] 0 ; 1[; donner un encadrement de a à 10^{-2} prés

x	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
Signe de f(x)	+	+	+	-					

On a f(0,3) x f(0,4)<0 donc un encadrement de a au dixième près est **0,3<a<0,4**

x	0,31	0,32	0,33	0,34	0,35	0,36	0,37	0,38	0,39
Signe de f(x)	+	+	+	+	+	+	+	+	-

On a f(0,38) x f(0,39)<0 donc un encadrement au centième près est **0,38<a<0,39**

○ encadrement de la racine à N prés : technique de la dichotomie

Exemple : soit f(x) = x^2-3x+1. On suppose que l'équation f(x)=0 admet une solution unique a dans I=] 0 ; 1[; donner un encadrement de a à 10^{-2} près.

- On commence par chercher le centre de classe de l'intervalle I ; soit $\frac{0+1}{2} = 0,5$
- On calcule l'image et le signe du centre de classe : $f(0,5) = -0,25 < 0$
- Comme f(0)>0 donc $a \in]0;0,5[$
- On refait le même procédé : trouver le centre de classe, étudier le signe de l'image et conclure :
- $\frac{0+\frac{1}{2}}{2} = 0,25 : f(0,25) = 0,31 > 0$ donc $a \in]0,25;0,5[$

Nous avons déjà un encadrement au centième près !

NB : la méthode de balayage est plus précise que la méthode de dichotomie. Si la méthode à utiliser dans un exercice n’est pas préciser, il faut toujours utiliser celle du balayage.

III. LES BRANCHES INFINIES :