

- Cours en ligne
- Cours presentiels

 **MATHS**

 **PC**

 **SVT**

La science autrement...



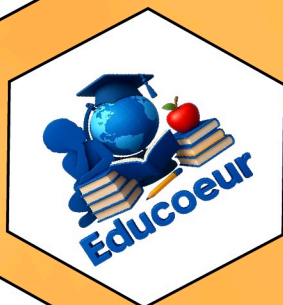
Nos programmes:

Niveaux : Moyen/Secondaire



Programme Wolof

Apprentissage avec des cours
exclusivement en Wolof



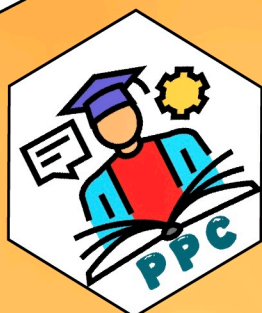
Programme Social

Prise en charge d'élèves avec
des problèmes de moyens



Tous les élèves

Renforcement de capacité
en ligne



Prépa Concours

Préparation des concours comme :
ESP - EMS - ENSA - IPSL
ISFAR ENSAE



77 106 98 79

77 575 04 18



TD FONCTIONS NUMERIQUES

PARTIE A

Exercice 1

On considère les fonctions f et g définies par : $f(x) = \begin{cases} -x^2 + x & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{x^2}{x-1} & \text{si } x > 0 \end{cases}$ et

$$g(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 - 1} + 4 & \text{si } x \geq 1 \\ \frac{2x^2 + 6}{x+1} & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

- 1) Déterminer les domaines de définitions D_f de f et D_g de g .
- 2) a) Etudier la dérivabilité de f au point $x_0 = 0$; puis interpréter géométriquement les résultats obtenus.
- b) Etudier la dérivabilité de g au point $x_0 = 1$; puis interpréter géométriquement les résultats obtenus.

Exercice 2

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \begin{cases} m(x^2 - 1) & \text{si } x > 1 \\ \frac{x-1}{x+2} & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$ $m \in \mathbb{R}$

- 1) Déterminer le domaine de définition D_f de f .
- 2) Déterminer la valeur du réel m pour que f soit dérivable au point $x_0 = 1$.

Exercice 3

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x - 2 & \text{si } x > 1 \\ \frac{x+a}{x-2} & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$ $a \in \mathbb{R}$

- 1) Déterminer le réel a pour que f soit continue au point $x_0 = 1$.
- 2) Pour la valeur de a trouvée ; étudier la dérivabilité de f au point $x_0 = 1$.

Exercice 4

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \begin{cases} \frac{x+a}{x^2+1} & \text{si } x < 1 \\ x^2 + ax + b & \text{si } x > 1 \end{cases}$ $(a, b) \in \mathbb{R}^2$
 $f(1) = 0$

- 1) Déterminer les réels a et b pour que f soit continue au point $x_0 = 1$.
- 2) Pour les valeurs de a et b trouvées ; étudier la dérivabilité de f au point $x_0 = 1$.

Exercice 5

On considère la fonction f définie sur $]1; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x-1} - \sqrt{x}$

- 1) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]1; 2[$.

2) Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}}$

- a) Prouver que l'équation $f(x) = 0$ est équivalente à l'équation $g(x) = x$.

- b) Montrer que pour tout $x \in]1; +\infty[$, $|g'(x)| \leq \frac{1}{2}$
- c) En déduire que pour tout $x \in]1; +\infty[$, $|g(x) - \alpha| \leq |x - \alpha|$.

Exercice 6

On considère l'équation (E): $\tan x = \frac{\pi}{2} - x$; $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

- 1) Soit f la fonction définie sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ par : $f(x) = 2 \tan x - \pi + 2x$.
 - a) Montrer que l'équation (E) équivaut à l'équation $f(x) = 0$.
 - b) Etudier les variations de la fonction f . En déduire que l'équation (E) admet une unique solution β .
- 2) Montrer que β vérifie : $\frac{1}{2} < \beta < 1$.

Exercice 7

Soit f la fonction définie sur $\left[0; \frac{3}{2}\right]$ par : $f(x) = \frac{x^2+3}{x+2}$.

- 1) Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.
- 2) Etudier les variations de la fonction g définie sur $\left[0; \frac{3}{2}\right]$ par : $g(x) = f'(x)$.
- 3) a) Montrer qu'il existe un unique réel $\alpha \in \left]0; \frac{3}{2}\right[$ tel que : $f'(\alpha) = 0$.
 b) En déduire le signe de $f'(x)$ sur $\left[0; \frac{3}{2}\right]$.
- 4) Dresser le tableau de variation de la fonction f .

Exercice 8

On considère la fonction f définie sur $I = \left[0; \frac{\pi}{e}\right]$ par : $f(x) = \frac{1}{\cos x}$.

- 1) Montrer que f est une bijection de I sur un intervalle J à déterminer.
- 2) Etudier la dérivabilité de f^{-1} bijection réciproque de f sur J .
- 3) Donner l'expression de $f^{-1}(x)$.

Exercice 9

On considère la fonction f définie sur $I = [2; +\infty[$ par : $f(x) = x - \sqrt{x^2 - 4}$.

- 1) Etudier f ; puis construire sa courbe représentative (C_f) dans un R.O.N $(O; \vec{i}, \vec{j})$
- 2) Montrer que f réalise une bijection de I sur un intervalle J à déterminer. On note f^{-1} la bijection réciproque de f .
- 3) a) Montrer que pour tout $x \in J$; $f^{-1}(x) = \frac{x^2+4}{2x}$.
 b) Tracer la courbe $(C_{f^{-1}})$ de f^{-1} dans le même repère.

Exercice 10

Soit f la fonction définie par :
$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + x - 1}{x - 1} & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{x}{\sqrt{x^2 + x}} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

- 1) a) Déterminer le domaine de définition D_f de f .
b) Calculer les limites aux bornes de D_f ; puis interpréter les résultats obtenus.
- 2) Étudier la dérivabilité de f en 0 ; puis interpréter les résultats obtenus.
- 3) a) Étudier les variations de f .
b) Dresser le tableau de variation de f .
- 4) Tracer la courbe représentative (C_f) de f dans un R.O.N $(0; \vec{i}, \vec{j})$.
- 5) Soit g la restriction de f à l'intervalle $I =]0; +\infty[$.
a) Montrer que g est une bijection de $I =]0; +\infty[$ sur un intervalle J à préciser.
b) On note g^{-1} la bijection réciproque de g . Calculer $(g^{-1})'(\frac{3}{2})$; en déduire que g^{-1} est dérivable en $y_0 = \frac{3}{2}$; puis calculer $(g^{-1})'(\frac{3}{2})$.
c) Tracer la courbe $(C_{g^{-1}})$ de g^{-1} dans le même repère.

Exercice 11

On considère la fonction f définie par :
$$f(x) = \begin{cases} \frac{-4x^3 + 4x - 1}{2x^2} & \text{si } x \leq 1 \\ (x - 1)\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$
. On note (C_f) sa courbe représentative dans un R.O.N $(0; \vec{i}, \vec{j})$.

- 1) a) Déterminer le domaine de définition D_f de f .
b) Calculer les limites aux bornes de D_f .
c) Étudier la nature des branches infinies de (C_f) .
d) Étudier la position de (C_f) par rapport à ses asymptotes.
- 2) a) Étudier la continuité de f en $x_0 = 1$.
b) Étudier la dérivabilité de f en $x_0 = 1$; puis interpréter les résultats obtenus.
- 3) On pose : $h(x) = -2x^3 - 2x + 1$.
a) Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in]0; 1[$; puis donner un encadrement de α à 10^{-1} près.
b) En déduire le signe de $h(x)$ sur $\mathbb{R}$.
- 4) a) Calculer la dérivée f' de f dans les intervalles où f est dérivable.
b) Montrer que $f'(x) = \frac{h(x)}{x^3}$ si $x < 1$ et $x \neq 0$.
c) Dresser le tableau de variation de f .
d) Montrer que $f(\alpha) = \frac{8\alpha - 3}{2\alpha^2}$.
- 6) On note g la restriction de f à l'intervalle $I =]-\infty; 0[$.
a) Montrer que g réalise une bijection de I sur un intervalle J à préciser. On note g^{-1} la bijection réciproque de g .

- b) Montrer que g^{-1} est dérivable en $y_0 = 1$; puis calculer $(g^{-1})'(1)$.
c) Dresser le tableau de variation de g^{-1} .
7) Tracer (C_f) et $(C_{g^{-1}})$ dans le même repère.



PARTIE B

Exercice 1

Déterminer si elles existent les limites suivantes.

- a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{1 - \sqrt{x+1}}$ b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+7} - \sqrt{3x+3}}{x-2}$
c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x \tan x}$ d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{5-x}}{\sqrt{2x+7} - \sqrt{10-x}}$
e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + \sqrt{x^2+1}}{x}$ f) $\lim_{x \rightarrow \infty} x + \sqrt{2x^2 - 5x + 1}$
g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sin x}{2 - \sin x}$ h) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + \sin x}{x}$
i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \tan x}{x^3}$ j) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos \left[\left(\frac{x+1}{6x-\pi} \right) \pi \right]$
k) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{2 + \sin x}$

Exercice 2

Soit f la fonction définie par $f(x) = \sin 2x + 2 \sin x$.

On désigne par (C_f) sa courbe de représentative.

- 1) Détermine le domaine de définition de f . et justifie l'intervalle $[0; \pi]$ comme l'intervalle d'étude. 2) Montre que f est dérivable sur $[0; \pi]$ et $\forall x \in [0; \pi]$,

$$f'(x) = 4(\cos x - \frac{1}{2})(\cos x + 1).$$

- 3) Dresser le tableau de variation de f sur l'intervalle $[0; \pi]$.

- 4) Construis (C_f) sur $[-2\pi; 2\pi]$ (On représentera les tangentes horizontales)

Exercice 3

Soit la fonction donnée par :

$$f(x) = \begin{cases} x \sqrt{\frac{x+1}{x}} & \text{si } x < 0 \\ \frac{x^3 - x^2}{x^2 + 1} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

D_f son domaine de définition et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 2 cm).

- 1) Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$, Écrire f sans barres de valeur absolue.

- 2) Étudier la continuité et la dérivabilité de f en 0 et en -1

- 3) Étudier les branches infinies et la position de (C_f) par rapport aux éventuelles asymptotes.

- 4) Calculer $f'(x)$ sur les intervalles où f est dérivable.

- 5) Soit $g(x) = x^3 + 3x - 2$

- a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α sur $\mathbb{R}$. Donner un encadrement de α par deux entiers consécutifs.

- b) En déduire le signe de g sur $\mathbb{R}$.

- 6) Montre que $f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2+1)^2}$ sur $]0; +\infty[$

- b) Établir le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

- 7) Tracer les droites remarquables puis (C_f) .

Exercice 4

Problème: Partie A

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 5 & \text{si } x < 2 \\ \frac{3}{x+1} - \sqrt{x-2} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

et (C_f) sa courbe de représentation graphique dans une repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- 1) Montre que le domaine de définition de f , D_f est $\mathbb{R}$

- 2) Calculer les limites de f aux bornes de D_f puis étudier les branches infinies de f .

- 3) Étudier la continuité et la dérivabilité de f en 1 puis interpréter graphiquement les résultats.

- 4) Calculer f' où f est dérivable et dresser le tableau de variation de f .

- 5) Montre que l'équation $f(x)=0$ n'a pas de solution dans $] -\infty; 2[$ puis $f(x) = 0$ admet une unique solution α

dans $]2; +\infty[$ et que $\alpha \in [\frac{5}{2}; 3]$

- 6) Calculer $f(4)$ puis en déduire $(f^{-1})'(\frac{3}{5} - \sqrt{2})$

- 7) Tracer C_f .

Partie B

Soit h la restriction de f à $[\frac{5}{2}; +\infty[$. On pose $g(x) = -1 + \frac{3}{\sqrt{x-2}}$

- 1) Montre que $h(x)=0$ a même ensemble de solution que $g(x) = x$

- 2) Montrer que $\forall x \in [\frac{5}{2}; +\infty[, |g'(x)| \geq 3\sqrt{2}$

- 3) En déduire pour tout $\forall x \in [\frac{5}{2}; +\infty[, |g(x) - \alpha| \geq 3\sqrt{2}|x - \alpha|$

Exercice 5

Partie A

On considère la fonction $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto 2x - \sqrt{1+x^2}$.

- 1) Étudions les variations de h .

- 2) a) Montre que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique α dans $\mathbb{R}$.

- b) Montre que $\alpha \in]0; 1[$.

- 3) Étudier le signe de $h(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Partie B

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} 2\sqrt{1+x^2} - x & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{x}{1+x^2} + 2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

et (C_f) sa courbe de représentation graphique dans une repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- 1) Montre que $D_f = \mathbb{R}$.

- 2) Calcule les limites de f aux bornes de D_f .

- 3) a) Étudie la continuité de f en 0.

- b) Étudie la dérivabilité de f en 0 et interpréter graphiquement les résultats.

- 4) Montre que la droite $(D) : y = -3x$ est une asymptote oblique à (C_f) en $-\infty$ puis étudier la position

entre (D) et la courbe

(C_f) sur $] -\infty; 0[$

5)a) Calcule f' sur les intervalle où f est dérivable puis établir que :

$$\forall x \in] -\infty; 0[, f'(x) = \frac{h(x)}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

b) Dresser le tableau de variation de f .

6) Construire (C_f) .

Exercice 6

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{3 + \sin x}{1 - 2\sin x}$

1)a) Détermine le domaine de définition de f .

b) Montre que f est périodique de période 2π . Que peut on en déduire.

2) On choisit comme domaine d'étude $D_E = [-\pi; \pi] - \left\{ \frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6} \right\}$.

a) Étudier la dérivabilité de f sur D_E , puis calculer $f'(x)$.

b) Établir le tableau de variation de f sur D_E .

c) Tracer la courbe (C_f) sur D_E .

Exercice 7

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x(x-2)}{x-1} & \text{si } x < 0 \\ x + \sqrt{|x^2 - x|} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

et (C_f) sa courbe de représentation graphique dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a) Déterminer le domaine de définition D_f de f puis calculer les limites de f aux bornes de D_f .

b) Étudier la continuité de f en 0 et 1.

c) Étudier la dérivabilité de f en 0 et 1.

2) Calculer $f'(x)$ sur chaque intervalle où f est dérivable.

3) Résoudre dans $]0;1[$, l'inéquation

$$2\sqrt{x - x^2} + 1 - 2x \leq 0.$$

En déduire le signe de $f'(x)$ sur $]0;1[$ puis étudier son signe sur les autres intervalles.

4) Dresser le tableau de variation de f .

5)a) Montre que C_f admet une asymptote oblique (Δ_1) en $+\infty$

b) Étudier la position relative de C_f par rapport à (Δ_1) sur $]1; +\infty[$

6)a) Montrer que C_f admet une asymptote oblique (Δ_2) en $-\infty$

b) Étudier la position relative de C_f par rapport à (Δ_1) sur $] -\infty; 0[$

7) Construis C_f .

8) Soit la restriction de f à l'intervalle $I =]1; +\infty[$.

a) Montre que g est une bijection de I sur un intervalle J à préciser.

b) g^{-1} la bijection réciproque de g est-elle dérivable sur J ? Calculer $(g^{-1})'(2)$.

c) Expliciter $g^{-1}(x)$ pour $x \in J$.

d) C_g^{-1} la courbe représentative de g^{-1} dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.