

- Cours en ligne
- Cours presentiels

La science autrement...

 **MATHS**

 **PC**

 **SVT**



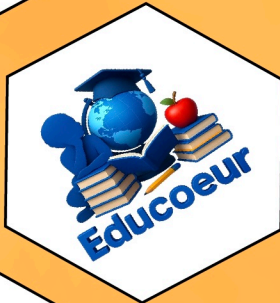
Nos programmes:

**Niveaux : Moyen/Secondaire**



**Programme Wolof**

Apprentissage avec des cours  
exclusivement en Wolof



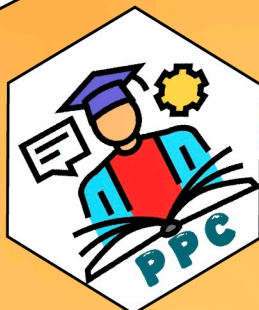
**Programme Social**

Prise en charge d'élèves avec  
des problèmes de moyens



**Tous les élèves**

Renforcement de capacité  
en ligne



**Prépa Concours**

Préparation des concours comme :  
ESP - EMS - ENSA - IPSL  
ISFAR ENSAE



**77 106 98 79**  
**77 575 04 18**



## TD: LIMITES-CONTINUITE

**EXERCICE 1 : calculer les limites suivantes :**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x^2 + 2x}; \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-x^2 - 3x + 4}{x^2 - 6x + 5}; \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 4x + 3}{-x^2 + 5x - 4};$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 3x - 2}{2x^2 - x - 6}; \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + \sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} - 1}; \quad \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{x^2 - 2x + 3 + \sqrt{3}}{-x + \sqrt{3}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{2x-1}}{\sqrt{x+2} - \sqrt{6-x}}; \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{8 - x^3}{x^2 - 4}; \quad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x+5} - 3}{x - 4};$$

$$\lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt[3]{x} - 2}{\sqrt[3]{x+19} - 3}; \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{x\sqrt{x} - a\sqrt{a}}{x - a}; \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{a+2x} - \sqrt{3x}}{\sqrt{3a+x} - 2\sqrt{x}};$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x}{\sqrt{a+x} - \sqrt{a-x}}; \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{7-x} - 2}{x+1}; \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{3x-2} - 2}{x-2}$$

**EXERCICE 2 :****1. Calculer les limites suivantes**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{2x^2}{x-1}}; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x + \sqrt{x^2 + 1}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x} - x - 2;$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x} - \sqrt{x}}}; \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x - |x|}{3x + 2}; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{2} - \frac{\sqrt{|x^2 - 1|}}{x};$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1} + 4x\sqrt{x}}{x^2 + \sqrt{x^3 + 1}}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{\sqrt{x^2 + 2} - 1}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{4x^2 + x + 1} - x + 3$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 + 2x - 5} \right)$$

**2. Soit f une fonction définie sur R tel que  $1 < f(x) < 2$ . Calcule les limites suivantes :**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) + x; \lim_{x \rightarrow +\infty} xf(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x};$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + f(x)}{xf(x)}; \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x - 1}; \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f^2(x) + 2f(x) - 3}{f(x) - 1}$$

### **EXERCICE 3 : calculer les limites suivantes**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \tan x}{x^3}; \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{12 \sin x - 6}{4x - \pi};$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x - 1)}{x^2 + 2x - 3}; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sin \pi x}; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - 1}{4x - \pi}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + x}{\cos x - 1}; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x}; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{x^2};$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3 + \cos x} - 2}{x^2}; \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{2 \sin x - \sqrt{2}}{2x - \frac{\pi}{2}}; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin(\sin x))}{x}$$

$$; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - \sin x}{\sqrt{1 - \cos x}}; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1 - x} - 1}{\sin x}; \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{2 \cos x - 1}{3x - \pi}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 \sin x}{1 - \cos x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\tan 7x}; \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x + \cos x}{\cos x + \sin x - 1}$$

### **EXERCICE 4 :**

**1. En utilisant les théorèmes de comparaison calculer les limites suivantes :**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \cos x}{3 + \cos x}; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x + \sin x}; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x + 1) \sin x}{x^2 + 1}; \lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin \left( \frac{1}{x} \right)$$



**2. On considère la fonction f définie par  $f(x) = \frac{1-\cos 2x}{x^2}$**

**a. Montrer que  $f(x) = \frac{2 \sin^2 x}{x^2}$**

**b. En déduire que  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos 2x}{x^2} = 2$  puis calculer  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos 2x}{\sin^2 2x}$**

**c. Démontrer que  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$**

**d. En déduire les limites ci-dessous :**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{1 - \cos x}; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{\cos x - 1}; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \cos x}}{\sin x}; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{1 - \cos x}$$

**3. Démontrer que pour tout  $x \geq 1$ ,  $\frac{1}{2} \leq \frac{x}{x+1} \leq 1$ . En déduire**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{x}}{x+1}; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x}(x+1)}$$

**4. Soit g la fonction définie sur  $\mathbb{R}^+$  par  $g(x) = \sqrt{3+x} - \sqrt{x}$**

**a. Montrer que  $g(x) = \frac{3}{\sqrt{3+x} + \sqrt{x}}$  et  $\frac{3}{2\sqrt{3+x}} \leq g(x) \leq \frac{3}{2\sqrt{x}}$**

**b. Déduis-en  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ . Que peut-on en conclure ?**

**5. Soit h la fonction définie pour tout  $x \geq 2$  :  $h(x) = \frac{3x + \sin x}{x-1}$**

**a. Montrer que pour tout  $x \geq 2$ ,  $|h(x) - 3| \leq \frac{4}{x-1}$**

**b. En déduire  $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$**

**6. Etudier les limites des fonctions suivantes en  $+\infty$  et en  $-\infty$**

$$f(x) = 2x + 1 + 3\sin x; g(x) = \frac{x}{2 - \sin x}; h(x) = \frac{2}{1+x} + \frac{\sin x}{x}; i(x) = \frac{x + \sin x}{-\sin x + 2}$$

### **EXERCICE 5 : étudier les branches infinies des fonctions suivantes**

$$f(x) = \frac{2x^2 - 7x + 3}{x - 1}; g(x) = \sqrt{2x^2 - 7x + 1}$$

$$h(x) = 2x - 3\cos x; i(x) = x(7 - 2\sin x)$$

## EXERCICE 6 :

1. Etudier la continuité des fonctions suivantes en  $x_0$  :

$$f(x) = \begin{cases} 3 - 2x & \text{si } x < 0 \\ 2x + 3 + \sqrt{x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \quad x_0 = 0$$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{1-\sqrt{x^2+1}} & \text{si } x < 0 \\ 1 - \sqrt{|x^2-1|} & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \quad x_0 = 0$$

2. Etudier la continuité de la fonction suivante sur son domaine de définition :

$$h(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 - x - 2} & \text{si } x \leq -1 \\ (1-x)\sqrt{1-x^2} & \text{si } -1 < x < 1 \\ \frac{1-x}{1+x^3} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

3. Détermine les réels donnés pour que la fonction soit continue dans son ensemble de définition :

$$i(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x \leq 1 \\ -ax^2 + 2x + 3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$j(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x < -1 \\ x^2 + bx + c & \text{si } -1 \leq x \leq 2 \\ -x + 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

## EXERCICE 7 :

Soit  $f$  la fonction définie par  $f(x) = \frac{x^3 - 3x + 6}{(x-1)^2}$

1. Déterminer le domaine de définition de  $f$

2. Calculer les limites aux bornes de  $D_f$ .

3. Etudier les branches infinies de  $f$ .

4. Déterminer les réels  $a$ ,  $b$  et  $c$  tels que  $\forall x \in D_f; f(x) = ax + b + \frac{c}{(x-1)^2}$ . En déduire l'existence d'une asymptote oblique à  $C_f$  puis étudier la position relative de  $C_f$  et de l'asymptote.

5. Calculer  $f'(x)$  puis étudier le signe de la dérivée.

6. Dresser le tableau de variation de  $f$ .

7. Tracer la courbe  $C_f$  et les asymptotes dans un repère orthonormé direct (unité : 1cm)

## EXERCICE 8 :

5

Soit la fonction  $g$  définie par  $g(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2-3x+3} & \text{si } x \geq 0 \\ -x + \sqrt{x^2 - 2x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$

1. Déterminer  $Dg$  et les limites aux bornes de  $Dg$
2. Montrer que les droites  $\Delta: y = x + 3$  et  $\Delta': y = -2x + 1$  sont des asymptotes à  $Cg$  respectivement en  $+\infty$  et en  $-\infty$
3. Etudier la continuité puis la dérivabilité de  $g$  en  $0$  et interpréter graphiquement le résultat.
4. Préciser le domaine de dérivabilité de  $g$  puis calculer  $g'(x)$  pour chaque intervalle
5. Dresser le tableau de variation de  $g$ .
6. Soit  $k$  la restriction de  $g$  sur  $]-\infty ; 0[$ 
  - a. Montrer que  $k$  réalise une bijection de  $]-\infty ; 0[$  vers un intervalle  $I$  à déterminer.
  - b.  $k^{-1}$  est-elle dérivable en  $2 + 2\sqrt{2}$  ? si oui calculer  $(k^{-1})'(2 + 2\sqrt{2})$
7. tracer  $Cg$  et  $Ck^{-1}$  sur un même repère.