

- Cours en ligne
- Cours presentiels

 **MATHS**

 **PC**

 **SVT**

La science autrement...



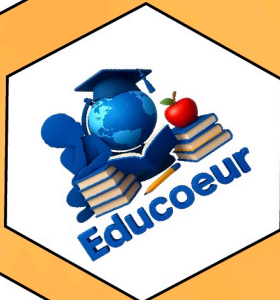
Nos programmes:

Niveaux : Moyen/Secondaire



Programme Wolof

Apprentissage avec des cours
exclusivement en Wolof



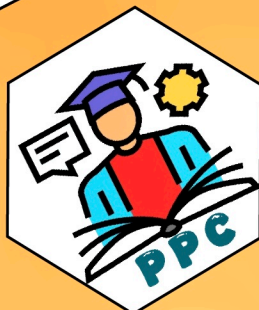
Programme Social

Prise en charge d'élèves avec
des problèmes de moyens



Tous les élèves

Renforcement de capacité
en ligne



Prépa Concours

Préparation des concours comme :
ESP - EMS - ENSA - IPSL
ISFAR ENSAE



77 106 98 79
77 575 04 18



FONCTION LOGARITHME

TS2

Exercice 1

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

- a. $\ln(2x - 3) = -1$
- b. $\ln(x^2 - 3x - 2) = 0$
- c. $\ln(x^2 + 5x + 6) = \ln(x + 11)$
- d. $\ln(x + 3) + \ln(x + 2) = \ln(x + 11)$
- e. $2 \ln(x - 4) = \ln x - 2 \ln 2$
- f. $\ln x + \ln(2x + 5) = \ln 3$
- g. $(2 - x)(\ln(x + 5)) = 0$
- h. $(\ln x + \frac{1}{2})(\ln x - 2) = 0$
- i. $\ln \sqrt{2x - 3} = \ln(6 - x) - \frac{1}{2} \ln x$
- j. $\ln \sqrt{x + 4} + \ln \sqrt{x - 1} = \ln \sqrt{6}$
- k. $\ln |2x - 5| - \ln |2x + 2| = \ln |x + 1|$
- l. $\ln(-x - 2) = \ln \left| \frac{-x-1}{x+3} \right|$

m. $\ln^2 x + 2 \ln x = 3$

n. $6 \ln^2 x + 7 \ln x - 3 = 0$

o. $(\ln(x - 1))^2 - \ln(x - 1) - 6 = 0$

p. $\ln(x^2) = (\ln x)^2$

q. $2 \ln^3 x + 3 \ln^2 x - 8 \ln x + 3 = 0$

r. $\ln^4 x - 34 \ln^2 x + 225 = 0$

s. $\ln^2 x - \frac{1}{\ln^2 x} = \frac{15}{4}$

t. $\frac{2 \log x + 3}{\log x + 1} = \frac{7}{3}$

u. $\log_3 x \times \log_9 x = 2$

v. $\log(x^2 - 69) = 2$

w. $\log_a x = \log_{a^2}(3x - 2) \quad a \in \mathbb{R}_+^* - \{-1\}$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

- a. $\ln(2x - e) > 1$
- b. $\ln(2x + 1) \leq \ln(x + 3)$
- c. $\ln \left(\frac{2x-3}{5x+1} \right) \leq 0$
- d. $\ln(x^2 + 8x + 20) > \ln(x + 13)$
- e. $\ln(x + 2) \leq \ln(x^2 - 4)$
- f. $\ln(2 - x) + \ln(x + 4) \leq \ln(3x + 2)$
- g. $\ln(2x - 1) + \ln(3x + 7) > \ln 3$
- h. $\ln x + \ln(x + 2) < \ln(x^2 - 2x + 2)$
- i. $\ln(x + 5) + \ln(x - 1) < \ln(5x + 7)$

j. $\ln^2 x - 5 \ln x + 6 > 0$

k. $\ln x - 3 \leq \frac{1}{\ln x}$

l. $(1 - \ln x)(2 - \ln x) \geq 0$

3. Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes d'équations suivants :

$$S_1 \begin{cases} \ln x + 3 \ln y = 1 \\ 9 \ln x - 6 \ln y = 20 \end{cases} \quad S_2 \begin{cases} 3 \ln x - 4 \ln y = -6 \\ \ln(x^2) + \ln y = 7 \end{cases}$$

$$S_3 \begin{cases} x + y = 25 \\ \ln x + \ln y = 2 \ln 2 \end{cases} \quad S_4 \begin{cases} \ln \left(\frac{x^2}{y^3} \right) = 9 \\ \ln(xy^5) = \frac{17}{2} \end{cases}$$

$$S_5 \begin{cases} \ln x + \ln y = \ln 3 + \ln 6 \\ \ln(x + y) = \ln 9 \end{cases}$$

$$S_6 \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ \ln(-x) + \ln(-y) = 2 \ln 2 + \ln 15 \end{cases}$$

Exercice 2 Calculer les limites suivantes

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x - 2 \ln x}{x + \ln x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 2x)}{4x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{\ln(1 + 2x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sqrt{x} \ln x}{\ln(1 + \sin x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin x)}{\sin 2x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin 2x}{(\ln x)^4}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{\ln(2x - 1)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{\ln(1 + 3x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 3x)}{\sqrt{x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x[\ln(x + 1) - \ln x]$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right]$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x}{x - 2} \ln(x - 2)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 + 1)}{x^3 + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x - 2) \ln \left(\frac{x + 1}{x^2 - 4x + 4} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \ln(x + 1)}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln(x + 1)}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 + \ln(x + 1) - 2\sqrt{1 + x}}{x^2}$$

Problème 1 : BAC 2012 S2 1^{er} groupe

Partie A : On considère la fonction g définie par $g(x) = 1 - x^2 - \ln x$

- 1. Calculer $g(1)$.
- 2. Etudier les variations de g .
- 3. Dédire de cette étude le signe de $g(x)$ pour tout x de l'ensemble de définition D_g de la fonction g .

Partie B : On considère la fonction f définie par $f(x) = 2 - x + \frac{\ln x}{x}$.

- Déterminer l'ensemble de définition D_f de f .
- Etudier les variations de f et dresser son tableau de variations.
- Montrer que la courbe représentative (C_f) de f admet comme asymptote la droite (Δ) d'équation : $y = 2 - x$.
 - Etudier la position relative de (C_f) par rapport à (Δ).
- Déterminer les coordonnées du point A de (C_f) où la tangente est parallèle à (Δ).
- Représenter dans un repère orthonormé ($O, \vec{i}, \vec{j}$) (unité graphique 2cm) la courbe (C_f) et les droites asymptotes.

Problème 2

Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = x - 1 + \frac{1}{x} & \text{si } x \leq 1 \\ f(x) = 1 - (\ln x)^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

On désigne par (C_f) la courbe de f dans un repère orthonormé ($O, \vec{i}, \vec{j}$).

- Déterminer le domaine de définition D_f de f .
 - Démontrer que f est continue et dérivable en 1.
 - Calculer les limites de f aux bornes de D_f et préciser les branches infinies de (C_f).
 - Etudier les variations de f .
 - Démontrer que le point d'abscisse e est un point d'inflexion de (C_f).
 - Tracer (C_f) dans le repère.
- Soit h la restriction de f à l'intervalle $]1; +\infty[$.
 - Démontrer que h réalise une bijection de $]1; +\infty[$ vers un intervalle que l'on précisera.
 - En déduire que h admet une fonction réciproque h^{-1} dont on précisera le sens de.
 - Calculer $h^{-1}(-1)$. Justifier que h^{-1} est dérivable en -1 et déterminer l'équation de la tangente à la courbe de h^{-1} en son point d'abscisse -1 .
 - Justifier que h^{-1} est dérivable sur son domaine de définition.
 - Tracer la courbe représentative de h^{-1} .
 - Expliciter l'expression de $h^{-1}(x)$.

Problème 3

Partie A : On considère la fonction g définie sur $] -\infty; 0]$ par : $g(x) = \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| - \frac{2x}{x^2-1}$.

- Déterminons l'ensemble de définition de g .
- Montrer que $\lim_{x \rightarrow -1^-} g(x) = +\infty$.
- Dresser le tableau de variations de g .
- En déduire le signe de g sur son domaine de définition.

Partie B : Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = x \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| & \text{si } x \leq 0 \\ f(x) = (x+1) \ln(x+1) - x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

- Montrer que $D_f = \mathbf{R} - \{-1\}$.
- Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0. Interpréter graphiquement les résultats.
- Etudier les limites aux bornes de son domaine.
 - Vérifier que $\forall x \neq -1, \frac{x+1}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1}$, puis montrer que $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-1}{2} \ln \left(1 + \frac{2}{x-1} \right) = 1$.
 - En déduire que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$. Interpréter ce résultat.
 - Calculer les autres limites aux bornes de son ensemble de définition.
 - Donner la nature de la branche infinie en $+\infty$.
- Etudier les variations de f .
 - Montrer que : $\forall x \in]-\infty; -1[\cup]-1; 0[, f'(x) = g(x)$.
 - Calculer $f'(x)$ sur $]0; +\infty[$.
 - Dresser le tableau de variations de f .
- Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α sur $]1; +\infty[$ et vérifier que $\alpha \in]3, 9, 4[$.
- Représenter graphiquement la courbe de f dans un repère orthonormé d'unité 1cm ? On placera le point A de la courbe d'abscisse α .

Problème 4

On considère la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = x \ln \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire

On considère la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = \ln \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) - \frac{2}{1+x^2}$.

- Montrer que pour tout x de $]0; +\infty[$, $g'(x) = \frac{2(x^2-1)}{x(x^2+1)^2}$.
 - En déduire le signe de g' suivant les valeurs de x .

2. a. Dresser le tableau de variations de g .
- b. En déduire qu'il existe un unique nombre réel α tel que $g(\alpha) = 0$. Vérifier que : $0,5 < \alpha < 0,6$.
3. Déduire des questions précédentes le signe de $g(x)$ sur $]0; +\infty[$.

Partie B : Etude de la fonction f

1. Etudier la parité de f . En déduire qu'on peut réduire le domaine d'étude à $]0; +\infty[$. Interpréter géométriquement le résultat.
2. Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $]0; +\infty[$, on a : $f'(x) = g(x)$.
En déduire les variations de f sur $]0; +\infty[$.
3. Calculer la limite de f quand x tend vers $+\infty$ (On pourra poser $u = \frac{1}{x^2}$).
4. a. Calculer la limite quand x tend vers 0^+ (on pourra écrire f sous la forme $f(x) = x \ln(x^2 + 1) - 2x \ln x$).
- b. Etudier la dérivabilité de f en 0. Préciser la tangente à la courbe de f au point O.
5. Encadrement de α .
 - a. Prouver que, pour tout élément x de $[0, 5; \alpha]$, on a : $0 \leq f'(x) \leq f'(0, 5)$.
 - b. En déduire que, pour tout élément x de $[0, 5; \alpha]$, on a : $0 \leq f(\alpha) - f(0, 5) \leq (\alpha - 0, 5)f'(0, 5)$ puis que $0 \leq f(\alpha) - f(0, 5) \leq \frac{1}{10}f'(0, 5)$.
 - c. En déduire une valeur approchée de α à 0,01 près.
6. Dresser le tableau de variations de f et construire la courbe (C_f) .

Problème 5

Partie A : Soit g la fonction définie par :

$$g(x) = (x+1)^2 + 1 - \ln(x+1)$$

1. Déterminer le domaine de définition de g .
2. Calculer $g'(x)$ puis dresser son tableau de variations.
3. En déduire le signe de g .

Partie B : On considère la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x}{\ln|x|} & \text{si } x < 0 \\ f(x) = x + \frac{\ln(x+1)}{x+1} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

1. Déterminer le domaine de définition de f .
2. Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0. Interpréter graphiquement les résultats.
3. Déterminer les limites aux bornes de D_f puis préciser les branches infinies de (C_f) .

4. Montrer que $\forall x > 0$, on a : $f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$.

5. Calculer $f'(x)$ pour $x < 0$ et $x \neq -1$.

6. Dresser le tableau de variations de f .

7. Tracer (C_f) ainsi que les asymptotes dans un repère orthonormé d'unité 2cm .

Partie C : Soit h la restriction de f sur $]0; +\infty[$.

1. Montrer que h est bijective de $]0; +\infty[$ vers un intervalle J à préciser.
2. On appelle h^{-1} la bijection réciproque de h . h^{-1} est-elle dérivable en 0? Si oui calculer $(h^{-1})'(0)$.
3. Représenter graphiquement $(C_{h^{-1}})$ dans le même repère que (C_f) .
4. Montrer que la fonction H définie par : $H(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}[\ln(x+1)]^2$ est une primitive de h sur $]0; +\infty[$.
5. Calculer $A = [H(4) - H(0)] \times 4\text{cm}^2$ qui est l'aire comprise entre (C_h) , l'axe des abscisses et les droites $x = 0$ et $x = 4$.

Problème 6

Partie A : On définit sur $]0; +\infty[$, la fonction $U(x) = x - (x+1)[x^2 + \ln(x+1)]$.

1. Dresser le tableau de variations de U sur $]0; +\infty[$.
2. En déduire le signe de $U(x)$ sur $]0; +\infty[$.

Partie B : Soit f la fonction dont (C_f) et la représentation graphique dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et qui est définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{1-x^2} - x & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ f(x) = \frac{\ln(x+1)}{x} - x & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

1. Montrer que le domaine de définition de f est $D_f = [-1; +\infty[$.
2. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. Préciser la branche infinie de (C_f) .
3. a. Etudier la dérivabilité de f en -1^+ et en 0^- .

b. Interpréter graphiquement ces résultats.

4. On admet que : $\forall x \in]0; +\infty[$, $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(x+1) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$ (*)

a. Déduire de que :

$$-\frac{1}{2} \leq \frac{\ln(x+1)}{x} - 1 \leq -\frac{1}{2} + \frac{x}{3} \quad (**)$$

b. Utiliser (**) pour étudier la dérivabilité de f en 0^+ .

c. f est-elle dérivable en $x_0 = 0$? Justifier.

5. a. Déterminer l'expression de la dérivée f' de f sur $] -1; 0[$ et montrer que $\forall x \in]0; +\infty[$, $f'(x) = \frac{U(x)}{x^2(x+1)}$.
- b. Dresser le tableau de variations de f .
6. a. Montrer que la restriction g de f à $]0; +\infty[$ est une bijection.
- b. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α sur $]0; +\infty[$ et que $0 < \alpha < 1$.
- c. Préciser le domaine de définition de h^{-1} et son sens de variation.
- d. Justifier que h^{-1} est dérivable sur son domaine de définition.
7. Construire (C_f) puis la courbe représentative de h^{-1} sur la même figure.

Problème 7

Partie A :

Soit $g(x) = \frac{2x^2}{x^2-1} - \ln|x^2-1|$ définie sur $D_g =]-\infty; 0[-\{-1\}$.

1. Calculer les limites aux bornes de D_g .
2. Montrer que $\forall x \in]-\infty; 0[-\{-1\}$, on a $g'(x) = \frac{-2x(x^2+1)}{(x^2-1)^2}$.
3. Dresser le tableau de variation de g .
4. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur D_g et que : $-4 < \alpha < -3$.
5. Donner le signe de g suivant les valeurs de x .
6. Montrer que $\ln|\alpha^2-1| = \frac{2\alpha^2}{\alpha^2-1}$.

Partie B : Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\ln|x^2-1|}{x} - 1 & \text{si } x < 0 \\ f(x) = -1 + x^2 \ln x & \text{si } x \geq 0 \\ f(0) = -1 \end{cases}$$

1. Démontrer que $D_f = \mathbb{R} - \{-1\}$, puis étudier les limites aux bornes de D_f .
2. En déduire les asymptotes à (C_f) , parallèles aux axes du repère ?
3. Étudier la continuité de f en 0.
4. Étudier la dérivabilité de f en 0. Interpréter graphiquement les résultats obtenus.
5. Étudier la branche infinie de (C_f) en $+\infty$.
6. Montrer que $f(\alpha) = \frac{2\alpha}{\alpha^2-1} - 1$.
7. Montrer que $f'(x) = x(2 \ln x + 1)$ si $x \in]0; +\infty[$.
8. Montrer que $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$, si $x \in]-\infty; 0[-\{-1\}$.
9. Étudier les variations de f et dresser son tableau de variation sur D_f .

10. Tracer (C_f) dans un repère orthonormé d'unité 1cm. (On prendra $\alpha = 3, 1$)

Partie C : Soit h la restriction de f sur $[1; +\infty[$.

1. Montrer que h réalise une bijection de $[1; +\infty[$ vers un intervalle J à préciser.
2. Préciser les variations et l'ensemble de dérivabilité de sa bijection réciproque h^{-1} .
3. Montrer que le point $A(e^2 - 1; e)$ appartient à la courbe $(C_{h^{-1}})$.

Problème 8

Partie A : Soit la fonction g définie par

$$g(x) = x^2 + \ln x - 2.$$

1. Étudier les variations de g puis dresser son tableau de variations.
2. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution β sur $]0; +\infty[$ puis vérifier que $1, 3 < \beta < 1, 35$.
3. En déduire le signe de $g(x)$.

Partie B :

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{x^2+1-\ln x}{x}$.

1. Déterminer le domaine de définition D_f de f puis calculer les limites aux bornes de D_f .
2. Étudier la continuité et la dérivabilité de f en 0. Interpréter les résultats.
3. Étudier les branches infinies de (C_f) .
4. Préciser la position relative de (C_f) par rapport à la droite $(\Delta) : y = x$.
5. Calculer $f'(x)$ puis dresser son tableau de variation.
6. Construire (C_f) dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$. (unité 2cm)

Partie C : Soit h la fonction définie sur

$$I = [1, 3; 1, 35] \text{ par } h(x) = \sqrt{2 - \ln x}.$$

1. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ est équivalente à l'équation $h(x) = x$.
2. Montrer que h est décroissante sur I et que $\forall x \in I, h(x) \in I$.
3. Montrer que : $\forall x \in I, |h'(x)| \leq \frac{1}{3}$.

Partie D : On note la suite $(U_n)_{n \in I}$ définie par :

$$\begin{cases} U_0 = 1, 3 \\ U_{n+1} = h(U_n) \end{cases}$$

1. Montrer que pour tout n on : $|U_{n+1} - \beta| \leq \frac{1}{3}|U_n - \beta|$.
2. En déduire que : $|U_n - \beta| \leq \frac{5}{100} \left(\frac{1}{3}\right)^n$.
3. En déduire la limite de la suite (U_n) .
4. Déterminer le plus petit entier naturel p tel que $|U_p - \beta| \leq 10^{-6}$. Que représente β pour U_p .