

- Cours en ligne
- Cours presentiels

 **MATHS**

 **PC**

 **SVT**

La science autrement...



Nos programmes:

Niveaux : Moyen/Secondaire



Programme Wolof

Apprentissage avec des cours
exclusivement en Wolof



Programme Social

Prise en charge d'élèves avec
des problèmes de moyens



Tous les élèves

Renforcement de capacité
en ligne



Prépa Concours

Préparation des concours comme :
ESP - EMS - ENSA - IPSL
ISFAR ENSAE



77 106 98 79

77 575 04 18



Exercice 1. Raisonnement par récurrence

1. On considère la suite $(U_n)_{n \geq 0}$ définie par :

$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \frac{1}{2}(1 + U_n), \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, U_n > 1$

2. On considère la suite $(V_n)_{n \geq 0}$ définie par :

$$\begin{cases} V_0 = 2 \\ V_{n+1} = \sqrt{6 + V_n}, \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < V_n < 3$

3. On considère la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} U_0 = -1 \\ U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + 3, \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, U_n < 6$

4. On considère la suite (U_n) définie par :

$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \frac{2U_n + 3}{U_n + 4}, \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq U_n \leq 1$

Exercice 2.

Soit (U_n) définie par : $U_n = \frac{3n - 2}{4n + 1}$.

- Montrer que la suite (U_n) est majorée par $\frac{3}{4}$.
- Montrer que la suite (U_n) est minorée par -2 .

Exercice 3. Soit (U_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} U_0 = \frac{1}{2} \\ U_{n+1} = \frac{2U_n}{1 + U_n^2}; \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

- Calculer U_1 et U_2 .
- Prouver que : $0 < U_n < 1, \forall n \in \mathbb{N}$.
- (a) Montrer que la suite (U_n) est croissante.
(b) En déduire : $U_n \geq \frac{1}{2}, \forall n \in \mathbb{N}$

Exercice 4.

Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par : $U_n = \frac{3n + 2}{n + 4}$.

- Calculer les trois premiers termes de cette suite (U_n) .
- Étudier le sens de variation de (U_n) .
- Montrer que (U_n) est majorée par 3.
- Montrer que (U_n) est à termes positifs ; puis déduire que (U_n) est bornée.

Exercice 5.

Soient (U_n) et (V_n) les suites définies par :

$$\begin{cases} U_0 = 6 \\ U_{n+1} = \frac{1}{5}U_n + \frac{4}{5} \end{cases} \text{ et } V_n = U_n - 1.$$

- Calculer U_1, U_2, U_3, V_1, V_2 et V_3 .
- Montrer que (V_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
- Exprimer V_n puis U_n en fonction de n .
- Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.

5. Exprimer $S_n = V_0 + V_1 + V_2 + \dots + V_n$ et

$S'_n = U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_n$ en fonction de n .

Exercice 6.

Soit (U_n) définie par
$$\begin{cases} U_0 \in \mathbb{R} \\ U_{n+1} = \frac{3U_n + 4}{U_n + 3} \end{cases}.$$

1. Montrer qu'il existe deux valeurs de U_0 pour lesquelles (U_n) est constante.
2. On pose $U_0 = -5$ et (V_n) la suite de terme général $V_n = \frac{U_n - 2}{U_n + 2}$. Montrer que (V_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme.
3. Déterminer U_n en fonction de n puis en déduire la limite de U_n en $+\infty$.
4. Calculer $S_n = V_0 + V_1 + V_2 + \dots + V_n$ puis en déduire sa limite en $+\infty$.

Exercice 7.

Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n \left(2 - \frac{u_n}{4} \right) \end{cases}.$$

Soit $f(x) = x \left(2 - \frac{x}{4} \right)$. Soit $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

1. Étudier les variations de f et tracer la courbe $(\mathcal{C}_f)$.
2. En déduire la construction des premiers termes de (u_n) .
3. Que peut-on conjecturer ?
4. (a) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq 4$.
(b) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, (u_n)$ est croissante.

(c) En déduire que la suite converge (u_n) vers un réel l à déterminer.

Exercice 8.

Soit (v_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} v_0 = 0 \\ v_{n+1} = \frac{1}{2} \sqrt{12 + v_n^2}, \forall n \geq 0 \end{cases}.$$

1. Calculer les deux premiers termes.
2. Soit (w_n) la suite définie par : $w_n = v_n^2 - 4, \forall n \geq 0$.
 - (a) Montrer que (w_n) est une suite géométrique. Préciser sa raison et son premier terme.
 - (b) Déterminer le terme général de (w_n) et celui de (v_n) .
 - (c) Déterminer la limite de (v_n) .
3. On pose $S_n = \sum_{k=0}^n v_k^2$.
 - (a) Exprimer S_n en fonction de n .
 - (b) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} (S_n)$.

Exercice 9.

Soit la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2}}.$$

1. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique α sur $[0; +\infty[$ puis vérifier que $\alpha \in]0, 6; 0, 7[$.
2. Montrer que $\forall x \in [0; 1] \quad |f'(x)| \leq \frac{\sqrt{2}}{4}$.
3. Soit (u_n) définie par
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}.$$
 - (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq 1$.

(b) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{\sqrt{2}}{4} |u_n - \alpha|.$$

(c) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^n |u_0 - \alpha|, \text{ puis}$$

que (u_n) converge vers $\sqrt{\sqrt{2} - 1}$.

Exercice 10.

Soit g la fonction définie sur $]1; +\infty[$ par :

$$g(x) = 2 + \frac{1}{2\sqrt{x-1}}.$$

1. Montrer que l'équation $g(x) = x$ admet une unique solution α et $\alpha \in]2; 3[$.

(**Indication** : on pourra étudier la fonction $x \mapsto g(x) - x$).

2. Montrer que $\forall x \in [2; 3], 2 \leq g(x) \leq 3$.

3. Montrer que $\forall x \in [2; 3], |g'(x)| \leq \frac{1}{4}$.

4. Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = g(v_n) \end{cases}.$$

5. (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 2 \leq v_n \leq 3$.

(b) En utilisant l'inégalité des accroissements finis, montrer que,

$$\forall n \in \mathbb{N} : |v_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4} |v_n - \alpha|.$$

(c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|v_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n. \text{ Quelle est la limite de la suite } (v_n)? \text{ Que représente } \alpha \text{ pour } v_n.$$

Exercice 11.

On considère la suite (U_n) définie par

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{1}{3}U_n - \frac{1}{3}n - \frac{1}{2} \end{cases}$$

1. Calculer U_1 et U_2 .

2. Soit (V_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $V_n = 2U_n + n$. Montrer que (V_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

3. Exprimer U_n en fonction de n puis préciser sa limite en $+\infty$.

4. Calculer $S_n = U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_n$ en fonction de n puis déterminer sa limite.

Exercice 12.

Soit (U_n) la suite définie par
$$\begin{cases} U_0 = -3,5 \\ U_{n+1} = \frac{4U_n - 3}{-U_n + 2} \end{cases}.$$

1. (a) Montrer que $-4 \leq U_n \leq -3, \forall n \in \mathbb{N}$.

(b) Etudier les variations de (U_n) .

(c) En déduire que (U_n) admet une limite l à déterminer.

2. Soit $f(x) = \frac{4x-3}{-x+2}$.

(a) Montrer que $\forall x \in]-\infty; -3], |f'(x)| \leq \frac{1}{5}$.

Calculer $f(-3)$.

(b) Montrer que $|U_{n+1} + 3| \leq \frac{1}{5} |U_n + 3|$.

(c) En déduire que $|U_n + 3| \leq \left(\frac{1}{5}\right)^n, \forall n \in \mathbb{N}$.

(d) Retrouver le résultat de la question 1.d)

3. Soit (V_n) la suite définie par : $V_n = \frac{U_n + 3}{U_n - 1}$.

(a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique et que $V_0 = \frac{1}{9}$.

(b) Ecrire V_n en fonction de n puis U_n en fonction de n .

(c) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.

Exercice 13.

Soit (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$U_0 = 4 \text{ et } U_{n+1} = \frac{5U_n - 4}{U_n + 1}.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N} : U_n > 2$.
2. Montrer que la suite (U_n) est décroissante.
3. On pose pour tout $n \in \mathbb{N} : V_n = \frac{1}{U_n - 2}$.
 - (a) Montrer que la suite (V_n) est arithmétique et préciser sa raison.
 - (b) En déduire l'expression de V_n puis de U_n en fonction de n .
 - (c) On pose pour tout $n \in \mathbb{N} : S_n = V_0 + V_1 + V_2 + \dots + V_n$. Exprimer S_n en fonction de n .

Exercice 14.

Soit (U_n) la suite définie par :

$$U_0 = -3 \text{ et } U_{n+1} = \frac{8U_n - 8}{U_n + 2}.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N} : 2 < U_n < 4$.
2.
 - (a) Etudier la monotonie de la suite (U_n) .
 - (b) Justifier, sans calcul, que pour tout $n \in \mathbb{N}^* : U_n \geq \frac{16}{5}$.
3. On pose pour tout $n \in \mathbb{N} : V_n = \frac{U_n - 4}{U_n - 2}$.
 - (a) Montrer que la suite (V_n) est géométrique.
 - (b) En déduire l'expression de V_n puis de U_n en fonction de n .
 - (c) Posons pour tout $n \in \mathbb{N}^* : S_n = V_0 + V_1 + V_2 + \dots + V_n$. Exprimer S_n en fonction de n .

Exercice 15. Situation Complexe.

Une entreprise achète un véhicule à un coût de 30

000 000 F CFA. Ce véhicule se déprécie de 20% par an ; c'est-à-dire que son prix de revente baisse de 20% par an, pendant la même période, les prix des véhicules neufs de ce type augmentent de 3% par an. L'entreprise prévoit remplacer ce véhicule dans cinq ans en le revendant à un employé si la différence du prix d'achat du nouveau véhicule et le prix de revente de l'ancien véhicule n'excède pas 25 000 000 F CFA. Ton père est employé dans cette société et envisage acquérir ce véhicule au bout de cinq ans si son prix n'excède pas les 10.000 000 F CFA. Il se demande si la société acceptera de lui céder ce véhicule. Il te sollicite pour savoir s'il peut l'acheter. En utilisant tes connaissances mathématiques donne-lui une réponse argumentée.

Exercice 16. Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} U_0 = 4 \\ U_{n+1} = \frac{5U_n - 4}{U_n + 1} \end{cases} ; (\forall n \in \mathbb{N})$$

1. Calculer U_1 et U_2 .
2. Montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, U_n > 2.$$
3.
 - (a) Montrer que la suite (U_n) est décroissante.
 - (b) En déduire que la suite (U_n) est convergente puis déterminer sa limite.
4. Soit (V_n) la suite définie $\forall n \in \mathbb{N}$, par :

$$V_n = \frac{1}{U_n - 2}.$$
 - (a) Montrer que (V_n) est une suite arithmétique et préciser sa raison.
 - (b) Exprimer V_n puis U_n en fonction de n .
 - (c) Calculer $S_n = V_0 + V_1 + V_2 + \dots + V_n$