

CALCUL INTÉGRAL

EXERCICE I

Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'une primitive :

$$\begin{array}{llll} a) \int_{\ln 2}^{\ln 3} e^{2x+1} dx & b) \int_{-3}^1 \sqrt{7-3x} dx & c) \int_{-1}^0 \frac{1}{(2x+1)^2} dx & d) \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} 2 \sin 4x dx \\ e) \int_0^2 x e^{-x^2} dx & f) \int_{-\frac{2\pi}{3}}^0 \cos^3 x \sin x dx & g) \int_1^e \frac{\ln^2(x)}{x} dx & h) \int_0^1 \frac{1+e^x}{x+e^x} dx \quad i) \int_e^{e^2} \frac{1}{x \ln x} dx \end{array}$$

EXERCICE II

Déterminer les réels a , b et c tels que pour tout $u \neq \frac{1}{2}$, $\frac{u^2 - u + 1}{2u - 1} = au + b + \frac{c}{2u - 1}$
 En déduire $\int_{-\frac{1}{2}}^0 \frac{x^2 - x + 1}{2x - 1} dx$

EXERCICE III

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin^2(x) \cos^3(x)$

- Montrer par une linéarisation que $f(x) = \frac{1}{8} \cos x - \frac{1}{16} \cos 5x - \frac{1}{16} \cos 3x$.
- En déduire la valeur de l'intégrale suivante $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} 16 \sin^2(x) \cos^3(x) dx$
- Retrouver la valeur de I sans linéarisation.

EXERCICE IV

A l'aide d'une intégration par parties, calculer les intégrales suivantes:

$$\begin{array}{llll} a) \int_{-1}^1 (x+1)e^{-2x} dx & b) \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx & c) \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (2x-1) \sin x dx & d) \int_1^2 x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) dx \end{array}$$

EXERCICE V

Soit a un réel strictement positif : On pose $I(a) = \int_1^a \frac{\ln(x+1)}{x^2} dx$

- En remarquant que, pour tout $x > 0$, $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$, calculer $I(a)$ à l'aide d'une intégration par parties
- Calculer $\lim_{a \rightarrow +\infty} I(a)$ et $\lim_{a \rightarrow 0} I(a)$.

EXERCICE VI

- Démontrer que pour tout réel x on a : $\frac{e^{2x}}{1+e^x} = e^x - \frac{e^x}{1+e^x}$.
- En déduire le calcul de l'intégrale $I = \int_0^1 \frac{e^{2x}}{1+e^x} dx$.
- On pose $J = \int_0^1 e^x \ln(1+e^x) dx$. En intégrant par parties, calculer J .

EXERCICE V II

Soit la fonction f définie sur $]1, +\infty[$ par $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$

1. Calculer la fonction dérivée de f puis l'intégrale $I = \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} dx$

2. Soit $J = \int_{\sqrt{2}}^2 \sqrt{x^2 - 1} dx$.

Calculer $I + J$ en fonction de J à l'aide d'une intégration par parties.

3. En déduire la valeur de J .

EXERCICE V III

On considère l'intégrale $I_n = \int_0^1 t^n e^{2t} dt$ où $n \in \mathbb{N}^*$

1. Calculer I_1 en utilisant une intégration par parties.

2. En utilisant une intégration par parties, trouver une relation entre I_{n+1} et I_n .

3. En déduire I_2 et I_3

4. Utiliser les résultats précédents pour calculer l'intégrale $J = \int_0^1 (t^3 + 3t^2 + 2t)e^{2t} dt$

EXERCICE IX

Soit l'intégrale $K = \int_0^\pi e^x \cos 2x dx$

1. A l'aide de deux intégrations par parties successives, montrer que $K = \frac{e^\pi - 1}{5}$

2. On pose $I = \int_0^\pi e^x \cos^2 x dx$ et $J = \int_0^\pi e^x \sin^2 x dx$. Calculer $I + J$ et $I - J$

3. En déduire I et J .

EXERCICE X

On considère la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = x - 1 + e^{-x}$.

1. Établir les tableau de variation de f .

2. Tracer la courbe représentative C de f dans un repère orthonormal d'unité 2 cm..

3. Soit un réel α supérieur à 1 et $A(\alpha)$ l'aire de la partie du plan délimitée par les droites d'équations $x = 1$; $x = \alpha$; $y = x - 1$ et la courbe C .

(a) Calculer en cm^2 , l'aire $A(\alpha)$ en fonction de α .

(b) Calculer $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} A(\alpha)$.

4. On considère Σ , la portion du plan comprise entre les droites d'équations $x = 0$; $x = 1$; l'axe des abscisses et la courbe C . On note V le volume engendré par la rotation complète de Σ autour de l'axe des abscisses.

(a) Calculer en intégrant par partie $I = \int_0^1 (x - 1)e^{-x} dx$.

(b) Calculer V en cm^3 .