

- Cours en ligne
- Cours presentiels

 **MATHS**

 **PC**

 **SVT**

La science autrement...



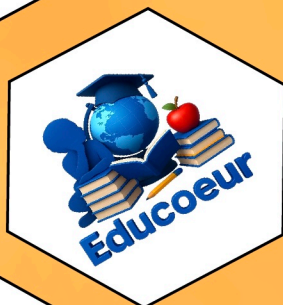
Nos programmes:

Niveaux : Moyen/Secondaire



Programme Wolof

Apprentissage avec des cours
exclusivement en Wolof



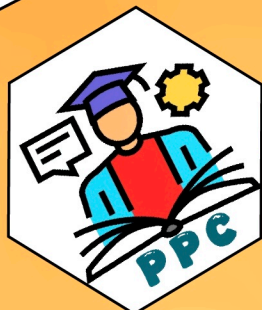
Programme Social

Prise en charge d'élèves avec
des problèmes de moyens



Tous les élèves

Renforcement de capacité
en ligne



Prépa Concours

Préparation des concours comme :
ESP - EMS - ENSA - IPSL
ISFAR ENSAE



77 106 98 79
77 575 04 18



Série : Calcul d'intégrales & Equations différentielles

Exercice 1

Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_0^1 \frac{1+e^x}{x+e^x} dx; \int_2^e \frac{\ln^2 x}{x} dx; \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx; \int_0^1 \left(\frac{e^{-x}}{e^{-x}+1} + \frac{e^x}{e^x+1} \right) dx; \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^3 x dx; \int_0^1 \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}} dx; \int_1^2 \frac{x^2+3x-1}{x^2} dx; \int_0^1 \frac{3e^x}{3e^x+1} dx; \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x (1+\tan^2 x) dx; \int_0^1 x e^{x^2} dx; \int_0^{\pi} e^x \sin x dx; \int_0^{\pi} \cos x \sin^2 x dx$$

Exercice 2

1. Soit $f(x) = \frac{2x^2}{x^2-1}$.

a) Déterminer les réels a , b et c tels que $\forall x \in \mathbb{R} - \{-1; 1\}; f(x) = a + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+1}$.

b) Calculer $\int_2^3 f(x) dx$.

2. Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes :

$$f(x) = \ln x; g(x) = (x+1)e^{-x}$$

Exercice 3

1. Montrer que $\frac{e^{2x}}{1+e^x} = e^x - \frac{e^x}{1+e^x}$. En déduire $I = \int_0^1 \frac{e^{2x}}{1+e^x} dx$.

2. On pose $J = I = \int_0^1 e^x \ln(1+e^x) dx$. En intégrant par parties, calculer J .

Exercice 4

Pour tout entier n , on pose $I_n = \int_1^e x(\ln x)^n dx$.

1. Calculer I_1 et I_2 .

2. En intégrant par parties, trouver une relation entre I_n et I_{n-1} .

3. Calculer I_3 et I_4 .

Exercice 5

On pose $I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+2}} dx$; $J =$

$$\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}} dx \text{ et } K = \int_0^1 \sqrt{x^2+2} dx.$$

1. Soit f la fonction définie sur $[0; 1]$ par $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+2})$. Calculer $f'(x)$.

2. En déduire I .

3. Vérifier que $J + 2I = K$.

4. A l'aide d'une intégration par parties sur l'intégrale K , montrer que $K = \sqrt{3} - J$.

5. En déduire les valeurs de J et K .

Exercice 6

1. Déterminer les réels a , b et c tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{-1; 0; 1\}, \text{ on a :}$$

$$\frac{1}{x(x^2-1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+1}.$$

2. Calculer $\int_2^4 \frac{1}{x(x^2-1)} dx$.

3. A l'aide d'une intégration par parties calculer $\int_2^4 \frac{x \ln x}{(x^2-1)^2} dx$.

Exercice 7

1. Résoudre équations différentielles suivantes :

a) $3y' + 5y = 0$; b) $y'' + 5y' + 6y = 0$;

c) $2y'' - 4y' + 2y = 0$; d) $y'' + \omega^2 y = 0$

2. a) Résoudre l'équation différentielle

(E) : $y'' + 2y' + 5 = 0$.

b) Déterminer la solution f de (E) vérifiant

$$f(0) = 1 \text{ et } f'(0) = 3$$

Exercice 8

On considère l'équation différentielle

(E) : $y'' + 2y' + y = -2e^{-x}$

1. Montrer que la fonction h définie par $h(x) = -x^2 e^{-x}$ est une solution de (E).

2. Résoudre l'équation différentielle $y'' + 2y' + y = 0$. En déduire la solution générale de (E).

Exercice 9

Soit l'équation différentielle :

$$(E) : y'' - 2y' + 2y = 2 - 4x + 2x^2.$$

1. Trouver g une fonction polynôme du second degré solution de (E) .
2. Montrer que h est solution de (E) si et seulement si $h - g$ est solution de l'équation différentielle $(E_1) : y'' - 2y' + 2y = 0$.
3. En déduire les solutions de (E) .
4. Trouver la solution f de (E) dont la courbe représentative passe par l'origine du repère et admet en ce point une tangente parallèle à la droite d'équation $y = x$.
5. Déterminer une primitive de f

a) En utilisant une intégration par parties

b) En utilisant l'équation différentielle.

Exercice 10

$$1. \text{ Soit } (E_0) : y' + 2y = e^{-x} \cos x.$$

a) Déterminer les réels α et β pour que la fonction $\phi : x \mapsto (\alpha \cos x + \beta \sin x)e^{-x}$ soit solution

de (E_0) .

b) Déterminer la solution g de (E_0) vérifiant $g(0) = 1$.

$$2. \text{ On considère l'équation différentielle } (E) : y'' - 3y' + 2y = (x+1)e^{-x}.$$

a) Déterminer les réels a et b pour que la fonction $h : x \mapsto (ax + b)e^{-x}$ soit solution de (E) .

b) Montrer qu'une fonction f est solution de (E) si et seulement si $f - h$ est solution de

$$\text{l'équation différentielle } (E') : y'' - 3y' + 2y = 0.$$

c) Résoudre (E') . En déduire les solutions de (E) .

d) Déterminer la solution f de (E) vérifiant $f(0) = 0$ et $f'(0) = -1$

Exercice 11

On considère l'équation différentielle

$$(E) : y'' + 2y' + 3y = (x^2 + 1)e^{-x}.$$

1. Déterminer les réels a , b et c pour que la fonction g définie par $g(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$ soit solution de (E) .

2. Montrer qu'une fonction h est solution de (E) si et seulement si $h - g$ est solution de l'équation différentielle $(E_0) : y'' + 2y' + 3y = 0$.

3. Déterminer la solution f de (E) dont la courbe admet à l'origine une tangente de coefficient directeur -1 .

Exercice 12

$$\text{Soit } (E) : y'' - 2y' + 2y = e^{-x} \sin x.$$

1. Déterminer les réels a et b pour que la fonction $g : x \mapsto (a \cos x + b \sin x)e^{-x}$ soit solution de (E) .

2. Montrer qu'une fonction f est solution de (E) si et seulement si $f - h$ est solution de l'équation différentielle $(E') : y'' - 2y' + 2y = 0$.

3. Résoudre (E') . En déduire les solutions de (E) .

4. Déterminer la solution f de (E) dont la courbe passe par O et admet en ce point une tangente de coefficient directeur $-\frac{1}{2}$.

Exercice 13

1. Déterminer la solution de l'équation différentielle $9y'' + 6y' + y = 0$ vérifiant les conditions initiales $y(0) = 6$ et $y'(0) = 0$.

2. Etudier les variations puis dresser le tableau de variation de la fonction f définie par :

$$f(x) = 2(x+3)e^{-\frac{x}{3}}.$$

3. Soit g la restriction de f à l'intervalle $I =]-\infty; 0]$.

a) Montrer que g réalise une bijection de I vers un intervalle J que l'on précisera.

b) Montrer que g^{-1} , la bijection réciproque de g est dérivable en 0 puis calculer $(g^{-1})'(0)$.

4. Construire la courbe représentative $(\mathcal{C}f)$ de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

5. Soit λ un réel quelconque. Déterminer l'aire $S(\lambda)$ du domaine compris entre $(\mathcal{C}f)$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \lambda$.

Calculer $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} S(\lambda)$. Interpréter géométriquement le résultat.

Exercice 14

1. Soit l'équation différentielle :

$$(E) : -\frac{1}{2}y'' + \frac{3}{2}y' - y = 0.$$

a) Résoudre (E) .

b) Déterminer la solution de (E) dont la courbe représentative (C) passe par le point

$A(0; -1)$ et admet en ce point, une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = e^{2x} - e^x$. Soit (Cf) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité 2cm).

a) Etudier les variations de f .

b) Déterminer une équation de la tangente à (Cf) au point d'abscisse $\ln 2$.

c) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interpréter géométriquement le résultat.

d) Construire (Cf) .

e) Calculer l'aire $\mathcal{A}(\alpha)$ en cm^2 , du domaine délimité par (Cf) , les droites d'équation

$x = \alpha$ ($\alpha < 0$), $x = \ln 2$ et l'axe des abscisses.

f) Calculer $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \mathcal{A}(\alpha)$ et interpréter graphiquement le résultat.

Exercice 15

1. On considère l'équation différentielle

$$(E) : y'' + 2\sqrt{2}y' + 6y = 0.$$

a) Résoudre (E) .

b) Déterminer la solution f de (E) dont la courbe représentative passe par le point $A(0; 1)$ et admet en ce point une tangente parallèle à la droite d'équation $y = -\sqrt{2}x + 1$.

2. On pose $F(x) = -\frac{1}{6} [f'(x) + 2\sqrt{2}f(x)]$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

a) Démontrer que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

b) En déduire le calcul de $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$

« L'ignorant affirme, le savant doute, le sage réfléchit »

Aristote

